A MATEMATIKA KÖZÉPISKOLAI OKTATÁSÁBAN ELŐFORDULÓ NÉHÁNY TIPIKUS HIBA GYAKORISÁGÁNAK FELMÉRÉSE ÉS JELLEMZÉSE

- Doktori értekezés -

A Szegedi József Attila Tudományegyetem Bölcsészettudományi Karának benyujtotta

Vaskor András

1971

B e v e z e t é s

Mosonyi Kálmán "Tipikus gondolkodási hibák számolásból és mérésből az általános iskola felső tagozatában" cimü doktori disszertációjában tanulmányozta az egyes számolási hibák évről évre való következetes ismétlődését. Kisérleteivel megmutatta ezen tipikus hibáknak a kisérletben szereplő tanulók létszámához viszonyitott százalékos előfordulását. Osztályozta a gondolkodási hibákat domináns okuk alapján. Mélyreható pedagógiai, pszichológiai és módszertani elemzés alapján javaslatot ad az egyes hibák gyakoriságának csökkentésére. Tanulmánya befejező részében emliti: "Nyitott kérdés a fenti tipusu hibák szerepe a középiskolában...., ez azonban külön tanulmányt igényelne." /17/ A teljesség és tökéletesség igénye nélkül vállalkozom e nyitott kérdést megközeliteni és 15 éves tapasztalatomat összegezni. A téma bonyolultsága és terjedelme miatt nem vállalkozhatom a középiskolai tananyagban előforduló minden tipikus hibának a feltárására. Különös figyelmet forditok az algebrai müveletek, azonosságok, egyenletek, logaritmus és szögfüggvények témakörében előforduló hibákra, illetve hibatipusokra. Igyekszem ezen hibatipusok strukturáját általános formulában is megadni.

Eredményes matematikatanitásunk szempontjából egyáltalán nem közömbös, hogy mi történik az általános iskolában tapasztalt hibákkal a középiskolában, hogyan javulnak százalékos összetételükben , hogyan játszanak szerpet a tanulók további munkájában, milyen ujabb hibákkal gyarapodik a hibák száma ? Mivel a középiskolai elsőéves algebra tananyagának egy része az általános iskolai anyagot mintegy megismétli / geometriában még a felsőbb évfolyamokon is már az általános iskolában előfordult geometriai tételek, ismeretek ujratárgyalásra kerülnek/, ezért szükséges és jogos az általános iskolában tapasztalt hibák sorsával törődni.

Vizsgálataim és kisérleteim elsődleges célja nem az, hogy az általános iskolából a középiskolába hozott hibákat felmérjem, osztályozzam és elemezzem, hanem az, hogy rámutassak ezen hibák sulyos következményeire abból a célból, hogy valóban az általános iskolákban és középiskolákban tanitó kartársaim együttes munkája révén lehetséges a hibák előfordulását a minimálisra csökkenteni. Folytatni kell a középiskolában e hibák elleni küzdelmet lankadatlanul és tudatosan, bár a hibák jó részének eredete az általános iskolában gyökeredzik. A középiskolákban tanitó egyik kartársam sem háríthatja a felelősséget az általános iskolára, mert:

a./ A hibák egy része a legjobb tanári munka mellett is bizonyos százalékban előfordul /megszüntetni nem tudjuk, csak előfordulását csökkenthetjük/.

b./ A gyermek nemcsak küllemre gyarapodik, fejlődik, alakul, hanem gondolkodásban, felelősségérzetben, megitélőképességben, absztraháló-képességben, és igy tovább./Néhány hibát általános iskolában gyakran elkövet, a sorozatos ráhatás miatt esetleg ritkán, vagy egyáltalán nem követ el fejlettebb fokon./

A fentiekből következik, hogy a középiskolában tanitó kartársak nincsenek feljogosítva arra, hogy pusztán unott ismétlésnek kezeljék ezeket az anyagrészeket, hiszen ilyen felfogás mellett az első sulyos hibát ők maguk követik el. Azoknál a tanulóknál , akiknek hibákkal terheltek az előismereteik ezen anyagrészeknél - általános iskolákból hozott problémák - ezek a hibák továbbra is megmaradnak és sulyos következményekkel járnak továbbtanulásuk folyamán. Ezen hibák megmaradása is többek között hozzájárul ahhoz, hogy egy-egy komolyabb feladat megoldásakor a tanuló kénytelen az idejét elfecsérelni részproblémák gyakorlati kivitelezésével /ha egyáltalán észreveszi, hogy valami problematikus számára/ ahelyett, hogy szellemi energiáját a feladat elvi, komplex megoldására forditaná.

Feltétlenül kivánatos, hogy elsőéveseink középiskolai tanulmányaikat ugy kezdjék, hogy felmérő dolgozatot iratunk velük - osztályozás igémye nélkül - , melyben gondosan összegyüjtjük azokat a feladatokat, amelyek megoldása során várható a már általános iskolában kialakult tipikus hibák elkövetése. Ezen dolgozatok értékelése teszi világossá a tanár számára, hogy ne az önmaga számára tetszetős és megszokott praktikus módon tárgyalja ezeket az anyagrészeket, hanem minden osztályban az adott valóságos helyzetből induljon ki. Igen sok tanár esetében találó Faragó László /7/ megállapitása: "Tanitásuk halad tovább a maga rutin által taposott utján,... a problémákba nem mélyülnek el, oktató és nevelő munkájukat... nem szervezik meg a kitüzött célok értelmében." Ne olyan hibákra gondoljunk itt, amelyek kimondottan elemi hibák /tizedes vessző, helyi értékből és nagyságrendi viszonyokból származó hibák, különböző numerikus számolási hibák /, hanem a későbbiek során említett hibákra.

Tanulmányom másik célja azon tipikus hibák egy részének feltárása, elemzése, amelyeknek "szülőházája" a középiskolai matematika óra. Tizenöt éves gyakorlatom alatt, amely során mint matematika tanár, szakkörvezető, osztályfőnöki munkaközösség vezető, szakmai munkaközösség vezető, kollégiumi nevelő és számos , a matematikával bajlódó tanuló instruktora összegyüjtöttem ezeket a tipikus hibákat. Természetesen az általam összegyüjtött hibák lajstroma nem tekinthető teljesnek, mert:

a./ az egyedi hibák tanulmányozása nem képezi tárgyát a tanulmánynak,

b./ gyakorlott kartársaim további tipikusnak minősithető hibákat tudnának felsorolni,

c./ az általam tapasztalt hibák közül a legtipikusabbakat sorolom fel,

d./ a középiskolai tananyag korszerüsitésével olyan uj anyagrészek is bekerültek a középiskolai tananyagba /ábrázoló geometria problémái, vektoralgebra, analizis egyes kérdései/, amelyek eredményes tanitásának tapasztalatait csak az elkövetkezendő években szürhetjük le. Ezen anyagrészeknél előforduló tipikus hibák elemzését feltétlenül meg kell előznie a tanulók absztraháló-képességének szintjével kapcsolatos vizsgálatnak, hiszen ezekben a tananyagrészekben döntő szerepet játszik az absztraháló-képesség és ennek hiányos voltából származó tipikus hibák.

A főiskolai hallgatók munkájában előforduló tipikus hibák kérdése külön tanulmányt igényel. A középiskolai tananyag bővülése folytán fellépő hibák vizsgálata elvégezhető lenne főiskolai hallgatók munkájában. / Hiszen az emlitett anyagrészek jó része a felsőoktatás anyagából való levitel utján került a középiskolába./ De nem lenne szerencsés az itt nyert tapasztalatokat általánositani középiskolai vonatkozásban is /egyrészt életkori sajátosság miatt, másrészt azon oknál fogva, hogy a főiskolán matematika szakon már csak a "jobbak" foglalkoznak matematikával./

Amellett, hogy gyakorlati munkám során évről-évre gazdagodott tapasztalatom a tipikus hibák számát és minőségét illetően, tapsztaltabb kartársaim segitségének sokat köszönhetek, akikkel konzultálhattam egy-egy hiba problémáiról. Köszönetet mondok a fent emlitett kollégáknak, továbbá azoknak a kartársaknak, akik közvetve vagy közvetlenül segitettek a vizsgálatok és kisérletek véghezvitelében.

Tanulmányomban a tipikus hibák okára való rámutatás mellett egyidőben a javitás egyik vagy több módját is tárgyalom. Ezeket a javitási módokat sikeresen alkalmaztam a hibák csökkentésében. Természetesen a tárgyalt eljárás csak egyike a sok javitási lehetőségnek, esetleg nem is a leghatásosabb.

"A gyermekek irásbeli dolgozatainak ... tanulmányozása és elemzése igen sok szempontból adhat értékes anyagot a kutatás számára. Következtetni tudunk belőle a gyermekek tudására, különböző képességeikre: gondolkodásuk, képzeletük fejlettségére ... tanulságokat kell levonnunk a gyermekekről nyert tapasztalatból a nevelő-oktató munkánkra vonatkoztatva" - irja Ágoston György /1/.

Azok a kartársak, akik szintén éveken keresztül tanulmányozzák e problámát - kisérleteket végeznek, egy-egy nagyobb anyagrész befejezése és összefoglalása után iratott iskolai "nagy" dolgozat kijavitása után nemcsak statisztikát késziteneк a jeles, jó ..., elégtelen dolgozatokról és a dolgozatok értékelése nemcsak ezen statisztika kihirdetéséből áll , hanem minden pirossal aláhuzott hiba önmaga számára is jelent valamit, amelyen elgondolkodik - további javitási lehetőséggel gazdagithatják az általam alkalmazott eljárást.

A hibakutatás rövid történeti áttekintése

"A természettudós tudja, hogy hiba nélkül észlelet nem gondolható. Azért vizsgálatainál előre megállapitja azokat a határokat, amelyek között az észlelési hibák mozoghatnak és másra nem is törekszik, minthogy e kétségtelenül hibás észleleti adatokból kiszámitsa a legvalószinü eredményt. Ha azonban azt tapasztalja, hogy az észlelet hibái következetesen a megszokott határokon tul vannak, akkor keresi azokat az okokat, amelyek e hibákat előidézhetik... Különös figyelemmel kell követni azokat a hibákat, melyek makacsabbak, jelentősebbek, tervszerübbnek látszanak a közönséges apró hibáknál és nem szabad elmulasztani e hibák okainak gondos kutatását, és a kellő diagnózis után azok orvoslását" - irja Beke Manó /2/.

A pedagógusok egy része nem vesz tudomást a tanulók matematikai munkájában évről-évre tapasztalható hibákról illetve prakticista álláspontot foglalnak el. "Én a szakmódszertani könyvek, elvek figyelembevételével tanitok, tehát a tanulók gyenge képessége miatt fordulnak elő ezek a hibák" - mondják egyesek. "Teljesen fölösleges az észlelt hibák ellen küzdeni, hiszen a középiskola létszámának jelentős bővülése miatt a nagy tömeg egy része ugyis csak visszahuzó erő, nincs tehetsége a matematikához, erőmet inkább csak a jobbak számára kamatoztatom" - vallják mások. Ezek a pedagógusok elfelejtik, hogy az igazi ut az lenne, hogy először a maguk eljárásában, másodsorban a tárgy természetében és csak harmadsorban keressék a hibát a tanulókban. Ez az ut valóban szükségképpen ahhoz a módszerhez vezet, hogy a tapasztalt, tipikus hibákat felismerje, összegyüjtse, elemezze azokat gondolkodáslélektani vonatkozásban is, majd a hibák okainak megtalálása után próbálkozzék megelőzési eljárásokat alkalmazni. Ha ilyen irányu munkálkodása néhány százalékban csökkenti a kritikus hibák előfordulásának számát, akkor is jelentős munkát végzett, hiszen valóban vannak olyan hibák, amelyeket a legjobb tanári munka mellett sem sikerül teljesen kiküszöbölni. A gondolkodás folyamata ugyanis magában foglalja az egyénben végbemenő teljes gondolkodási folyamatot a maga kerülőutjaival, tévedéseivel. Ha a gondolkodás folyamatából kihagyjuk a megoldás szempontjából kerülő- és téves lépéseket, akkor eljutunk a gondolatmenethez. / Logikai mozzanatok egymásutánja./ A gondolkodás folymatában a pszichológiai és logikai mozzanatok között általában eltérés mutatkozik. Az oktatás folyamatában azonban a gondolkodás pszichológiai és logikai menete közel kerül egymáshoz. " Itt részben a tárgy logikája, részben a tanár által pontosabban körülhatárolt kérdések miatt a tanulók gondolkodása kénytelen bizonyos logikai keretek közt maradni... Itt is lesznek egyéni kitérők és tévedések, csak kisebb mértékben." /12/ Éppen itt rejlik a tanár egyik legfontosabb feladata, tudnillik igyekezzék az egyéni kitérők és tévedések mértékét minél kisebb százalékra leszoritani. Az egyéni kitérők - amennyiben azok a helyes megoldáshoz mégis elvezetnek - nem csökkentik eredményes tanitásunk mértékét, sőt azt mutatják, hogy a tanulók önállóan, sablonmentesen gondolkodnak.

/Természetesen az indokolatlanul nagy kitérők ködösitő hatásuak, zavarhatják a problémamegoldás tisztaságát/.

Eredményes matematikatanitásunk a szaktárgyi kellékek mellett csak ugy képzelhető el, ha a pedagógus ismeri a tanulók gondolkodásának bonyolult folyamatát, ezért a gondolkodásra való nevelés központi szerephez jut a matematika tanitásában. "Képzeljük magunkat a diák helyébe, éljük bele magunkat gondolkodásmódjába, próbáljuk megérteni, mi megy végbe a diák fejében" - irja Pólya György /20/. Nem véletlen tehát, hogy a hibákkal foglalkozó kutatók a hibák okának feltárásában és a hibák javitásának módjában a gondolkodási folyamat pszichológiai és logikai mozzanataihoz nyulnak vissza. Nem kivánok foglalkozni azok eredményeivel, akik a helyesirás-, olvasás-, beszédhibák, stb. problémáival foglalkoztak / Harnisch, Hentscher, Meringer /, a matematika tanitásában előforduló hibák kutatói közül is csak azokat emlitem, akik a középiskolai matematika területén végezték vizsgálataikat hazai viszonylatban.

Beke Manó a matematika tanitásában előforduló tipikus hibák egész sorát tárja fel cikkeiben, amelyek szerinte három forrásból erednek:

a./ hamis vagy elhamarkodott analógiából származó hibák / a föltételeket más esetekben fennálló föltételekkel megegyezőknek vélik, holott a teljes megegyezés hiányzik/,

b./ következtetés hibái /legtöbbször a tétel hamaros, elhirtelenkedett megforditásából erednek/,

c./ a szemlélet hiányosságából fakadó hibák.

Megállapitásai között szerepel az a gyakorlati tanács is, hogy a tanár ne foglalkozzék bővebben a tanulók előtt a hibákkal, mert a tanulók lelkében esetleg jobban megmarad a hibás, mint a helyess dolog.

Kauffmann, Schmidt és Szenes az 1920-as években elsősorban a tanulók számolási készségében és a négy alapmüvelettel kapcsolatban előforduló hibákat vizsgálták.

Szelianszky Ferenc kutató munkájának gerincét az 1930-as évektől szintén a hibakutatás neveléslélektani problémái alkotják.

Cser Andor és Lénárd Ferenc számos tanulmányban és cikkben foglalkoznak a matematika tanitásában előforduló hibákkal. Különös gondot forditanak a matematika tanitásában fellelhető formalizmus veszélyeire.

A hibák legkiemelkedőbb kutatója Faragó László, aki egész munkásságát az 1950-es évektől a matematikatanitás problémáinak szentelte. Vizsgálta a tanulók matematikai absztrakció-képességét, a logikus gondolkodásra való nevelés terén elkövetett didaktikai hibákat, aritmetikai feladatok megoldása során elkövetett tanulóhibákat, lélektani szempontok érvényesitését a matematikatanitás metodikájában. A hibákat elsősorban annak alapján vizsgálta, osztályozta, hogy a matematikai didaktika melyik alapelvének megsértéséből származnak.

Mosonyi Kálmán mélyreható elemzés után a hibákat domináns okuk alapján a következőképpen osztályozta:

1/ helytelenül feltételezett analógián alapuló hibák

2/ formalizmuson alapuló hibák

3/ megszokáson alapuló hibák

4/ fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák

5/ hiányos előismeret által okozott hibák

6/ matematikai müszavakból, kifejezésekből eredő hibák.

A hibáknak ilyen osztályozása magában foglalja a már emlitett kutatók által kimutatott hibaforrásokat, osztályokat, rámutat arra, hogy a tanulók szempontjából a hibák szubjektiv és objektiv okokra vezethetők vissza, és lehetővé teszi a hibák differenciált tárgyalását. Az általa vizsgált hibákat a fenti osztályokba való csoportositás utján tárgyalja.

Dolgozatomban a Mosenyi által megalkotott hibaosztályok megtalálhatók, de a hibákat nem a domináns okuk szerinti csoportokba gyüjtve tárgyalom /hiszen középiskolában méginkább érvényes az a megállapitás, hogy a hibák eredete igen összetett/, hanem a tanitott anyag logikai sorrendjében, miáltal pontosabb rámutatás adódik a hibák gyökereire, kölcsönhatásaikra és javitási illetve megelőzési módjukra.

Mielőtt az egyes konkrét hibákkal foglalkoznánk, emlitsünk meg néhány, az egyes hibaosztályokra vonatkozó megállapitást.

"Az analógia teljesen áthatja gondolkodásunkat, mindennapi beszédünket és hétköznapi logikánkat csakugy, mint a kifejezés müvészi eszközeit és legmagasabb tudományos tevékenységet."/20/ Faragó László szerint tanitásunk egyik legfőbb feladata az analógiák tudatos keresésére irányuló nevelés. A tanulóban készséggé kell válnia , szokássá kell szilárdulnia annak a viselkedési formának, hogy amikor uj és szokatlan helyzetbe kerül, mindig feltegye a kérdést: "Beillik-e ez a szituáció megelőző tapasztalataim keretébe...Milyen ismert elemeket használhatok fel az uj helyzet értelmezésére és a vele kapcsolatos probléma megoldására?" /7/ Pólya György szerint " aligha tudnánk elképzelni olyan feladatot, amely száz százalékosan uj, amely egyetlen eddig megoldott feladathoz sem hasonlit..." /19/ Ezért ajánlja a módszert: "Nem ismersz valamilyen rokonfeladatot ?"

Az analógia alkalmazása a tanulóknál különféle szinten történik. Gyakran alkalmaznak bizonytalan, félreérthető, sőt hamis analógiát. A tanulóknál nem meglepő és nem elitélendő a helytelenül feltételezett analógia alkalmazása, hiszen komoly matematikusok is beleestek már ebbe a hibába. /Pl. sokáig keresték a negyedfokunál magasabb egyenletek megoldását gyökvonások segitségével - nyilván a másod- és harmadfoku egyenletek gyökképletének analógiája alapján/.

Beke Manó szerint nagy gondot kell forditani a "feltételek pontos és gondos megállapitására, a feltételekben mutatkozó különbségek szigoru kidomboritására" és a mechanikus, értelem nélküli számitások kiküszöbölésére. Vannak olyan elemek, amelyeknek mechanikussá kell válniok, de ezt előzze meg az illető elemnek a mély átértése.

A matematikai jelölések is gyakran analógiát sugallnak a tanulók számára olyan esetekben is, amikor csak formai hasonlóságról beszélhetünk, ugyanakkor a tartalom teljesen különböző. A helytelenül feltételezett analógián alapuló hibákkal meglehetősen sok tanulónál találkozunk.

A formalizmuson alapuló hibák száma is jelentős. A matematikatanitás formalizmusának megakadályozására igen sok törekvésről olvashatunk a szakirodalomban. Voltak és vannak olyanok, akik a tanulók ismereteinek készséggé való begyakorlását a formalizmus elleni harc ürügyén elhanyagolják. A formalizmus pedig a formának a tartalomtól, az elméletnek a gyakorlattól való elszakadását jelenti.

A tanulók matematikai ismereteinek formalizmusa a matematikai elméletet formalizáló nyelv hiányos és helytelen tanulmányozásának az eredménye. A matematikai nyelv szintakszisának tanulmányozásától való eltávolodás és szemantikájának elhanyagolása azt eredményezi, hogy a tanulóknak emlékezniök kell a szimbólumokkal végzett müveletek formális szabályaira, azok értelmének belátása nélkül. Erről tanuskodnak többek között azok a hibák, amelyeket a tanulók az algebrai kifejezések olvasásakor követnek el, vagy pedig akkor, amikor a szóban megfogalmazott kifejezéseket a matematika nyelvén kell leirni. A formalizmust "az emlékezetnek a megértés fölött való elhatalmasodása jellemzi" - irja Sztoljár /24/.

Sok tanulónál találkozunk a szabály betü szerinti, merev, vak alkalmazásával olyan esetekben, amelyekre a szabály alkalmazható és olyan esetekben is, amelyekre a szabály nem alkalmazható. " Az igazi alkotó szellem a szabályt természetes könnyedséggel az itélőképességgel való alkalmazásában nyilvánul meg olyankor, amikor a szabály valóban alkalmazható, anélkül azonban, hogy a szabály szavai akár egy pillanatra is elfeledtetnék a feladat lényegét, vagy a helyzet kinálta lehetőségeket" - irja Pólya György /20/. A matematikai jelölés nem formalizmust jelent, sőt nehéz gondolatmeneteket rögzithetünk szavak használata nélkül. Ezek az ábrák és jelek szorosan kapcsolódnak a matematikai gondolkodáshoz, használatuk segiti az értelmet.

A szabályok és képletek tudásának megkövetelése és begyakoroltatása tehát nem formalizmus,"ha mögötte konkrét példákon épülő, konkrét példákon alkalmazható tudást is megkövetelünk. Az értelmes tudást a szavakban való elmondás tudatosabbá, tartósabbá és alkalmazhatóbbá teszi" - irja Cser Andor /4/. Azt nem kell szintén vitatnunk, hogy szükséges a helyes gondolkodási formák, müveletek és módszerek beidegzése, automatizálása. "Bizonyos esetekben tehát a tudatosság nem szükséges, sőt hiánya gazdaságos" - irja Kelemen László /12/ - mert a tudatot felszabaditja más irányitó müveletek végzésére - feltéve, hogy az automatizált komponens kiépitése a fent elmondottak értelmében helyesen megtörtént. A formalizmusból eredő hibák jórésze a nem kellő módon átgondolt és elemzett tanári munkából származik, amelyek elleni küzdelem még fokozottabb erőfeszitést kiván a tanártól, mint az ugynevezett "tanulóhibák".

A megszokáson alapuló hibák nagy veszélye abban rejlik, hogy a tanár előtt sok esetben csak akkor lesznek nyilvánvalóak, amikor a tanuló esetleg már huzamosabb ideig "élt ezzel a lehetőséggel". Egyes tanulók ugyanis a saját maguk által kialakitott dolgokat - amelyekről nem veszik észre, hogy hamis következtetésen alapulnak - alkalmazzák különösképpen önálló munkájukban /házi feladatok/. Jellemző ezekre a tanulókra, hogy a problémákat leegyszerüsitik abban a tudatban, hogy az általuk kigondolt eljárás sokkal egyszerübb, mint a tanár eljárása. A legtöbb esetben nem mondják el a tanároknak, esetleg csak társaiknak, igy sokáig rejtve maradnak ezek a hibák. Ha nincs kellő ellenőrzés és minden tanulóval szoros kontaktusunk, akkor ezek a hibák megszokássá válhatnak és megszüntetésük csak hosszu, türelmes munkával lehetséges. /A megszokás ugyanis igen erős ellenzést vált ki minden külső beavatkozással szemben./ A megszokáson alapuló hibák különösen az erősen inhomogén képességü osztályokban fordulnak elő, ha a tanár a gyengébb tanulókkal való foglalkozást a jobbak haladásának érdekében elhanyagolja.

A fogalmak tisztázatlan voltából eredő hibák csaknem kivétel nélkül a tanár munkájából származnak. A matematika absztrakt fogalmakkal dolgozik, ebből tüstént következik, hogy a fogalmak kialakitására a tanárnak különös figyelmet és gondot kell forditania. Igen sulyos következményekkel jár abból a szemléletből eredő hiba, ha a tanár elhamarkodottan, felületesen intézi el az uj fogalmak kialakitását. "Ezt igy definiáljuk, ezt igy jelöljük, ezt általánosan igy irjuk és mondjuk"-találkozunk hasonló rövid elintézési módszerekkel azon jelszóval, hogy ugyis az alkalmazása a lényeges, ne fecséreljük hát az időt feleslegesen. Ilyen felfogás mellett a tanuló nem tudja belehelyezni a már birtokában lévő ismeret és fogalomrendszerbe az uj fogalmat, üres forma marad számára. Észre kell venni, hogy ha kezdetben "időt nyert" is a tanár, később azonban káros következményekkel jár az alkalmazások felismerésénél és technikai véghezvitelénél. Ha pl. nem történt meg a helyes fogalomalkotás az algebrai alapismeretek tárgykörében, akkor az egyenletek és egyenletrendszerek témakörében olyan áthidalhatatlan nehézségek és hibák sora zudul a tanulókra, hogy tanitásunk csődjével kell számolni. Pedig a helyes fogalomkialakitás utját járva ebben a témakörben látják a tanulók addigi fáradozásunk realizálódását, gyümölcsét. A szöveges egyenletek megoldásának nyomasztó légkörét megszüntettük ezzel, hiszen szellemi energiájukat csak arra kell forditani, hogy "a feladatot a matematika nyelvére kell átültetni, vagyis a feladat absztrakt matematikai modelljét kell megalkotni"./12/

Mencsinszkaja, Flesner, Kalmikova és Kelemen is hangsulyozzák, hogy a fogalomalkotás nem egyszerü absztrakció eredménye, hanem hosszu müveletsoroké. Az igazi megértés és fogalmi müveletvégzés alapja az ismeretek rendszerbe foglaltsága. Leszükitjük a fogalomalkotást és nem tartjuk be a fenti megállapitásokat pl. akkor, ha a sinus fogalmát elintézzük azzal, hogy $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. Ez formális, verbális tudást ad a tanulónak, bár sok esetben automatikusan helyesen alkalmazza, de mélyebb értelmezésétől pl. a hasonlóság fogalmával való kapcsolatának meglátásától megfosztjuk a tanulót. A fogalmak tisztázatlan voltából származó hibák észrevétele igen könnyü és szembetünő, ha találkozunk velük, ne restelljünk önkritikát gyakorolni tanitásunkról. Kivánatos, hogy ismételjük el bővebben, mélyrehatóbban a fogalom kialakitását akár a mi hibánk, akár az előző osztályban keresendő a hiba eredete.

A hiányos előismeretekből származó hibák erősen gátolják továbbhaladásunk ütemét. A tanulók ismeretéből hiányzik egy láncszem, lehetséges, hogy előzőleg kiépitettük ezt a láncszemet, de nem tartottuk gondosan "karban", feledésbe merült. Bármelyik eset áll is előttünk, hibák forrását jelenti, amely hibák a tanulók munkájában felismerhetők. / Kereshető a hiányos előismereteknek oka abban, hogy a tananyag mennyiségileg esetleg tulméretezett és hiányzik a kellő értelmi feldolgozás,de a korszerütlen - verbális, közlő, memorativ, stb... - oktatási módszerekben is./ Ezek a hibák szorosan összefüggnek a már tárgyalt többi tipusu hibával, javitási módjuk nyilvánvalóan a hiányok utólagos pótlása.

Végül megemlitjük a matematika sajátos nyelvéből, kifejezéséből, jelölésrendszeréből és müszavaiból származó hibákat. Ezen hibák eredetének több oka lehet. Bizonyos esetekben a müszó vagy kifejezés nem azt a matematikai tartalmat jelenti, amelyre a mindennapi életben használjuk. A tanulók nyelvi nehézség vagy kényelem miatt csak a magyar megnevezését tartják a maguk számára kötelezően megtanulandónak és ha idegen szóval hallják, akkor keverik más fogalmakkal.Zavarólag hat több tanulóra, hogy ugyanazt a matematikai fogalmat, müveletet, objektumot többféle jelöléssel, kifejezéssel is illetjük, amelynek sok esetben történeti, hagyományos értelmük van /pl. az a és b szorzatának jelölésére alkalmazva látjuk : a x b, a • b, és ab/. "Általában jobb egy objektumra pontosann egy jelet használni, és mindenképpen elkerülendő többféle jelölés önkényes változtatása" - irja Pólya György /19/.

Ezen hibák megelőzésében már sokat tett a tanár akkor, ha tudatositja nyomatékosan és ismételten a tanulók számára a többféle megnevezés matematikai azonosságát, ha kis kitérőket tesz az egyes müszavak vagy idegenből átvett szavak megmagyarázására, magyarra forditására /exponens, logaritmus, quotiens, differencia, rádiusz, konvex, konkáv, abszcissza stb. /, mert ezzel sok esetben szemléletes tartalommal párosul a megnevezés.

Vizsgálatok és kisérlet leirása, értékelése

Vizsgálataimat és kisérletemet négy középiskola első és második osztályaiban hajtottam végre. Három osztályban feladatlapos vizsgálatot végeztem a feltételezett hibák előfordulási gyakoriságának felmérése, analizálása végett, egy osztályban pedig a tapasztalt hibák megelőzési illetve javitási módjának kipróbálása céljából kisérletet folytattam. /Mezőberény, Orosháza, Hódmezővásárhely, Szeged/. Az iskolák kiválasztásánál az a szempont vezetett, hogy legyen közöttük kisebb és nagyobb iskola, kis multtal, de a jövőben is működő vidéki iskola, tradiciókkal és tapasztalt oktató gárdával rendelkező iskola.

Az osztályok megválasztásánál figyelembe vettem, hogy ne tul gyenge, de ne a legerősebb osztályt bocsássák rendelkezésemre. A kiválasztott osztályokban tanitó kartársak személyére is tekintettel voltam. / Fiatalabbak és idősebbek, a felügyeleti szervek véleménye szerint jó és közepes eredménnyel oktató kartársak. /

A vizsgálatok illetve a kisérlet azonos feltételek mellett folytak le, sugás és puskázás veszélye elkerülése végett előadótermekben végeztük, ahol lehetőség adódott a tanulók szétültetésére.

Előkisérletet folytattam az összeállitott feladatsor megoldásának időtartama megállapitására. Az előkisérlet alapján a feladatok megoldására szánt időt reálisan megállapitottam. Nem az volt a cél, hogy minél kevesebb idő alatt oldják meg a feladatokat, hanem, hogy mindenkinek legyen ideje megoldani azokat. Az igy megállapitott időtartam a későbbi vizsgálati osztályokra és a kisérleti osztályra kötelező érvényü volt.

A vizsgálatokat és a kisérletet minden osztályban abban az időben hajtottuk végre, amikor a szaktanár a tanmenet alapján befejezettnek nyilvánitotta a szóbanforgó tárgykörrel való foglalkozást és ujabb tárgykör tanitása következett, a másik részét pedig az év végi ismétlés után. A fent emlitett megszoritásokkal igyekeztem a kisérlet komplexitását adó feltételeket közel azonos korlátok közé szoritani, hogy mind a vizsgálatok, mind pedig a kisérlet eredménye minél jobban az általános érvényüt, a reális állapotot mutassák.

A feltételezett hibák előfordulásával, javitási és megelőzési módjával éveken keresztül foglalkoztam oktató-nevelő munkám során. Vizsgálatokat és a kisérletet ezen tapasztalatok mellett azért végeztem el, hogy a szubjektiv megitélés veszélyének érzése alól mintegy feloldódjak. A későbbiekben ismertetett vizsgálatok és kisérlet eredményei lényegében megegyeztek sokéves tapasztalatommal, természetesen egyes hibák ritkábban fordultak elő, mint a feltételezésem és addigi tapasztalatom alapján vártam volna. Ugyanakkor olyan hibák is felszinre kerültek, amelyeknek előfordulását tanitásom során egyáltalán nem, vagy igen ritkán tapasztaltam. Az egyes vizsgálati osztályokban a hibák előfordulásának százalékos aránya ugyan bizonyos szórást mutatott, de az a tény, hogy az általam tanitott osztályokban és a vizsgálatok szerint a személyileg és területileg különböző mindhárom osztályban ugyanazok a hibák jelentős számban előfordultak, arra enged következtetni, hogy a feltételezett hibák előfordulása bizonyos valószinüségi szinten általánosnak mondható.

A kisérleti osztályt különös gonddal választottam ki. Mivel nem lehetséges ugyanabban az osztályban vizsgálatot és a tapasztalt hibák megelőzésére szánt beavatkozást /kisérlet/ egyszerre végezni és ilymódon a beavatkozás hatását megállapitani, ezért olyan kisérleti osztályt választottam az egyik vizsgálati osztály mellé, hogy a mellékfeltételek közelitően konstansnak tekinthetők legyenek, hogy a variábilis tényezők /tudnillik a vizsgált hibák javitására, megelőzésére tett erőfeszitések/ hatása minél jobban megmutatkozzék. A továbbiakban X osztálynak nevezem azt a vizsgálati osztályt, amely mellé választottam a kisérleti osztályt. Ezen osztályokban tanitó kartársak többéves tapasztalattal rendelkeztek és a megitélés szerint hasonló eredményességgel tanitottak. Az X osztály létszáma 36, a kisérleti osztály létszáma 34 volt. Mindkét osztályban ugyanolyan felmérő dolgozatot irattunk és e dolgozatban mutatott teljesitmény , valamint a szaktanárok véleménye alapján 25-25 olyan tanulót választottunk ki, akiknek matematikai teljesitménye azonosan oszlott meg az 5-4-3-2 osztályzat között. Az ilyen kiválasztás az egyes osztályokban tanitó tanárok szubjektiv megitélését nagy mértékben csökkentette.

A felsőbb osztályokban végzett vizsgálatoknak és kisérletnek a fent emlitett módon való megszervezését mellőztük /többféle helyi- és személyi feltétel hiánya miatt/ ezen hibák megelőzésére illetve javitására a tanulmányban szereplő módszereket középiskolai munkám során éveken keresztül folytatott kisérleteim alapján összegezem.

A kisérleti osztályban a szaktanárral közösen megbeszéltük a várható hibákat minden anyagrész tanitása előtt, a tanitási órákon tudatosan előidézte /magyarázatban és példamegoldásokban/ a várt jelenséget anélkül, hogy a tanulók figyelmét erre felhivta volna. "Belevitte"az óra menetébe a jónak vélt megelőzési illetve javitási elképzeléseket. A tárgykör befejezése után oldották meg ugyanazokat a feladatokat, mint a vizsgálatban szereplő osztályok.

Mind a vizsgálatoknál, mind pedig a kisérletnél a tanulók ráirták nevüket és osztályukat a feladatlapra. Ezzel mintegy komolyabb erőkifejtésre késztettük a tanulókat. Ugyanakkor az osztályokban tanitó kartársak számára is gyümölcsöző volt, mert feltárultak alőttük az egyes tanulók hibái, amelyeket később hasznositottak további munkájukban. Számomra azért volt fontos elsősorban a nevek felirása, mert igy a dolgozat kijavitása után egyéni beszélgetést folytathattam /exploráció/ a tanulókkal a hibák okának feltárása érdekében, illetve a kiegészitő kisérlet megszervezésére támpontot adott.

A feladatok általában egyszerüek voltak. Ezzel a következő célokat kivántam elérni:

a./ ne vegyek el sok időt az iskola tervezett, normális előrehaladása folyamatából,

b./ aránylag mindenki oldja meg a feladatokat, foglalkozzék velük,

c./ az összetett feladatok megoldása során előforduló hibákat "meztelenre" vetkőztettem, csak annyi"köritést"hagytam meg, amely a vizsgált jelenséget nem fosztja meg ugyan környezetétől, de fölösleges sallangok nélkül áll előttünk,

d./ A vizsgált hibákat - ahol kézenfekvő - a matematika jeleivel általános formulával is felirassam.

A kisérleti eredmények értékelésénél egyrészt összehasonlitom a kisérleti osztály eredményét a vizsgálati osztályok együttes eredményével, másrészt az értékelés és összehasonlitás finomitása végett az X osztály eredményével. Némely esetben a beavatkozás hatásosságának megállapitására a matematikai statisztika módszereivel dolgozom, hogy a vizsgált populáció vonatkozásában általános megállapitást tehessek. Egyes anyagrészek tanitásában az elméleti és gyakorlati munkára forditott idő helyes arányának megállapitására törekszem.

A vizsgált tipikus hibák tárgyalása

1. hiba

Az algebrai kifejezések számértékének kiszámitása során igen gyakori hiba az első osztályban /de még felsőbb osztályban is előfordul/, hogy a tanuló nem tesz különbséget a

$$-n^2 \quad \text{és} \quad (-n)^2$$

között.

Vizsgálat

a./ Számitsuk ki

$$-n^2 + 1$$

kifejezés értékét, ha $n=2$.

b./ Számitsuk ki

$$-n^2 + 1$$

kifejezés értékét, ha $n=-3$.

Azért adtam a/ és b/ feladatot, mert

1./ a "várt" hibás megoldások értékelésénél el akartam kerülni a véletlen, az elirás esetleges szerepét,

2./ az "n" értéke pozitiv és negativ is legyen.

A vizsgálati eredmények értékelése után azonban igazolódott, hogy hü képet adott volna csak az egyik feladat is, mivel azok a tanulók, akik hibát követtek el az a/ feladatban, csaknem mind a b/ feladatot is rosszul oldották meg.

A vizsgálat eredménye a következő volt:

X osztály	17 /68%/	hibátlan	8 /32%/	hibás
Y "	28 /66%/	"	14 /33%/	"
U "	27 /59%/	"	19 /41%/	"

A három osztály együttes eredménye:

72 /64%/ hibátlan 41 /36%/ hibás

A hibás megoldások csaknem minden esetben azt jelentették, hogy waz a/ feladatban a helyes eredmény /-3/ helyett /+5/-öt, a b/ feladatban /-8/ helyett /+10/-et jelöltek meg.

A hiba forrása nyilvánvalóan a következő hibás okoskodás:

$$-n^2 + 1 = (-n)^2 + 1$$

Megtanulta a tanuló a negativ számnak negativ számmal való szorzási szabályát /vagy ennek megfogalmazása maradt meg benne olymódon, hogy a negativ szám négyzete pozitiv/ és megszokás alapján a variánsok értékelése, gondolkodás nélkül alkalmazza:

" ... ha n=2, akkor minusz "n" egyenlő minusz kettővel, minusz kettő négyzete pedig plusz négy. Az igy kapott eredményhez hozzáadjuk az 1-et, kapjuk a /+5/-öt."

A tanuló fenti hibás okoskodásának megmaradásához jelentősen hozzájárulnak még a következő okok:

1/ az algebrai kifejezések tagolt, "szemléletes" olvasásának hiánya /"minusz n négyzet" és "minusz n a négyzeten"/,

2/ az együttható fogalmának /különös tekintettel a /+1/ és minusz 1 együtthatókra/ tisztázatlan volta. Nem látja a tanuló, hogy tulajdonképpen a következőről van szó

$$-n^2 + 1 = (-1)n^2 + 1$$

/ Itt szerepet játszik az a szemlélet is, hogy az egyes szám a tanuló legkorábbi számbeli élménye és később elhomályosult az egységnek a szerepe, lekicsinylően kezelik. Ez abból a mondókából is kiderül, hogy "az egy sem nem szoroz, sem nem oszt"./

Kisérlet

A szaktanárral előre megbeszéltem, hogy az egyes tanítási órákon e témakör tárgyalása és begyakorlásakor sor kerüljön a fent emlitett megelőzési és javitási elgondolásokra is.

Gyakorolta a tanulókkal az algebrai kifejezések olvasását. Nem engedte meg, hogy a tanulók felületesen és pontatlanul használják az olvasásnál és beszédjükben a "minusz n négyzet" és "minusz n a négyzeten" kifejezéseket. Megoldották a tanulók aktiv közremüködésével, hogy vajon n-nek van-e olyan számértéke, hogy

$$-n^2 = (-n)^2$$

A megoldás után megnyugvással látták, hogy ez csak n=0 esetben lehet igaz.

Az együttható pontos meghatározása után a következő kérdésekre adtak választ:

Mi az együtthatója 2a-nak

" " $3a^2$-nek

" " a-nak

" " a^2-nek

" " $\frac{a}{3}$ -nak

" " $\frac{2a}{3}$ -nak

" " $\frac{3}{2}$ a -nak

Mi az együtthatója $-a$-nak

" " $-5a^3$-nek

" " $-\frac{a}{2}$-nek

" " $-\frac{2a}{5}$-nek

" " $-\frac{2}{3}a$-nak

.
.
.

Szorozzuk meg a-t minusz 1-gyel: $a(-1) = -a$

Szorozzuk meg a^2-et minusz 1-gyel: $a^2(-1) = -a^2$

Igy tudatosabbá vált, hogy minusz a, minusz a^2 tulajdonképpen azt jelenti, hogy

$-a = (-1)a$

$-a^2 = (-1)a^2$

Ilyen előzmények után került sor a kisérlet lefolyására, melynek eredménye a következő:

Hibátlan megoldás: 22 /88%/

Hibás megoldás: 3 /12%/

A három hibázó tanuló közül egy tanuló nem előjel, hanem számolási hibát vétett / nyilván figyelmetlenségből/, a másik két tanuló továbbra is a már emlitett hibát követte el.

A kisérleti osztály eredményének a három osztály együttes teljesitményével illetve az X osztály eredményével való összehasonlitásával láthatjuk, hogy a hibák előfordulása 36% illetve 32%-ról 12%-ra csökkent.

A kisérlet eredménye igazolja Kelemen László megállapitásait is. Megfelelő gondolkodtató feladatrendszerek, sorok segitségével a gyengébb tanulók teljesitménye ugrásszerüen emelkedik a müveletvégzésekben. Ezek a feladatrendszerek segitik a tanulókat az alapkérdések és összefüggések tisztázásában és biztonságosabban kezelik ezekután a gyakorlati alkalmazásokban.

A bevezetőben emlitettem, hogy az X osztály és a kisérleti osztály esetében igyekeztem a kisérleti feltételeket azonos módon megszabni. A két osztály kisérleti feltételei között csak egy feltétel különbözött, ez a feltétel az, hogy a kisérleti osztályban a kisérlet lefolytatása előtt a fent emlitett javitási és megelőzési eljárásokat alkalmaztuk. A matematikai statisztika módszereivel megvizsgáljuk, hogy ez az egyetlen nem azonos kisérleti feltétel a két osztály teljesitményében szignifikáns különbséget eredményezett-e, vagyis hogy beavatkozásunk hatásos volt-e ? Ha hatásos volt, az azt jelenti, hogy igen kicsiny a P valószinüsége annak, hogy pusztán a véletlen folytán /tehát ugy, hogy a beavatkozásunk hatástalan/ kapnánk az észlelttel megegyező nagyságu vagy annál nagyobb eltérést a két osztály teljesitményében.

Azoknak a tanulóknak a teljesitményét, akik hibátlanul oldották meg a feladatot 1-essel, a hibát elkövető tanulók teljesitményét pedig 0-val jelölöm.

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{x}'}{s}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}}$$

képlet alapján kiszámitom "t" értékét. A "t" érték kiszámitása után a Student-féle "t"-próba táblázata alapján megállapitom a szignifikancia fokát.

x: a kisérleti osztály egyéni teljesitményei

$\bar{x}$: " " teljesitményének átlaga

x': az X osztály egyéni teljesitményei

$\bar{x}'$: " " teljesitményének átlaga

n_1: az X osztály létszáma/akik a vizsgálatban résztvettek/

n_2: a kisérleti osztály létszáma

$$s = \sqrt{\frac{(x - x)^2 + (x - x)^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}}$$

Szabadsági fok: $n_1 + n_2 - 2$

A számitást meggyorsithatjuk, ha felhasználjuk a következő összefüggéseket:

$$\sum (x - \bar{x})^2 = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n_1}$$

$$\sum (x' - \bar{x}')^2 = x'^2 - \frac{(\sum x')^2}{n_2}$$

A képletben szereplő mennyiségek értékei:

X osztály	Kisérleti osztály
$\bar{x}' = \frac{17}{25} = 0{,}68$	$\bar{x} = \frac{22}{25} = 0{,}88$
$\sum x'^2 = 17$	$\sum x^2 = 22$
$\frac{(\sum x')^2}{n_1} = \frac{289}{25} = 11{,}56$	$\frac{(\sum x)^2}{n_2} = \frac{484}{25} = 19{,}36$
$\sum (x' - \bar{x}')^2 = 5{,}44$	$\sum (x - \bar{x})^2 = 2{,}64$

$$s = \sqrt{\frac{5{,}44 + 2{,}64}{48}} = \sqrt{\frac{8{,}08}{48}} = 0{,}41$$

$$t = \frac{0{,}88 - 0{,}68}{0{,}41} \sqrt{\frac{25 \cdot 25}{50}}$$

$$t = 1{,}805$$

A "t" táblázat alapján

$$0{,}05 < P < 0{,}10$$

Eredményünk tehát azt mutatja, hogy 5-10 % a véletlen szerepe abban, hogy a kisérleti osztály jobb eredménytsért el az X vizsgálati osztálynál, 90-95 % a beavatkozás hatásának tulajdonitható. Beavatkozásunk hatása bár nem mondható szignifikánsnak /ugyanis P< 5 % esetében beszélünk a pedagógiai kisérleteknél szignifikáns hatásról/, de a szignifikancia határán mozog.

2. hiba

Az algebrai kifejezések szorzásának témakörében gyakran elkövetett hiba, hogy a tanuló többtényezős szorzatot ugy szoroz meg egy tényezővel, hogy a szorzat minden tényezőjét szorozza. Általános formulával ez a hiba igy irható

$$a(bc) = abac$$

Itt nyilvánvalóan helytelenül feltételezett analógia a hiba közvetlen oka. A tanulók ugyanis megtanulták a többtaguak szorzásának szabályát, vagyis hogy a többtagu minden tagját szorozzuk a számmal, / $a(b\pm c) = ab\pm ac$ /, és ezt a szabályt átviszik a többtényezős szorzat szorzására is.

Vizsgálat

Végezzük el a következő szorzásokat:

1/ $3(-2)(-5)$

2/ $2a(-3b\ 4c)$

3/ $-2(a+b)(c+d)$

A hármas feladat a következő célokat szolgálta:

a/ egyik feladatban ne szerepeljenek betük, csak konkrét számok

b/ a másik feladatban betük is szerepeljenek és a tényezők egytaguak legyenek

c/ a harmadik feladatban a tényezők között többtaguak is legyenek.

A vizsgálat eredményeit a következőkben foglalom össze:

1. feladat

X osztály	20	/80 %/	hibátlan	5	/20 %/	hibás
Y "	31	/ 74 %/	"	11	/26 %/	"
U "	28	/61 %/	"	18	/39 %/	"

A három osztály együttes eredménye:

79 /69 %/ hibátlan 34 /31 %/ hibás

A 34 hibázó tanuló közül 6 tanuló előjelhibát vétett, 28 tanuló a már emlitett helytelenül feltétetlezett analógián alapuló hibába esett. / $3(-2)(-5) = (-6)(-15) = 90$ /. Kilenc tanuló amellett, hogy hibásan oldotta meg a feladatot, a zárójelhasználat fontosságát sem érzi, ugyanis zárójel nélkül irja le a megoldást

$$3(-2)(-5) = -6\cdot-15 = 90.$$

A zárójel elhagyása miatt ezen tanulók egy része a sulyos hiba mellett még egy hibába esik, mivel a

$$-6\cdot-15 =-21$$

eredményt hozzák ki.

2. feladat

X	osztály	18	/72 %/	hibátlan	7	/28 %/	hibás
Y	"	27	/64 %/	"	15	/36 %/	"
U	"	25	/54 %/	"	21	/46 %/	"

Össesitett eredmény:

70 /62 %/ hibátlan 43 /38 %/ hibás

A 43 hibázó tanuló közül 7 tanuló előjelhibát vét, a többi a hibák szempontjából a következő módon oszlik meg:

24 tanuló igy okoskodik

$$2a\ (-3b \cdot 4c) = -6ab \cdot 8ac = -48\ a^2bc$$

6 tanuló megoldása igy néz ki

$$2a\ (-3b\ \ 4c) = -6ab + 8ac$$

Ezek a tanulók tehát amellett, hogy a szorzat mindkét tényezőjét beszorozzák 2a-val, még azt a hibát is elkövetik, hogy a részletszorzatok közé a szorzás jele helyett összeadási jelet irnak. Ez méginkább megerősiti az előre feltételezett hibaforrást, t.i. azt, hogy mennyire a többtagu összegnek a szorzási szabályát igyekszenek érvényben tartani a többtényezős szorzatnak a szorzása esetében is.

3 tanuló teljes tájékozatlanságot árul el, értelmetlen összevisszaságot ir le, megnyugtatva magát, hogy meg tudta oldani a feladatot.

A 2. feladat eredményének az 1. feladat eredményével való összehasonlitása után azt a következtetést vonhatjuk le, hogy azok a tanulók, akik az első feladatot hibásan oldották meg, a második feladatban is hibáztak /három tanuló kivételével/. Ez közös vonása a két feladat rossz megoldásainak, vagyis a hiba oka is ugyanaz. Az a tény viszont, hogy 31%-ról 38%-ra emelkedett a hibát elkövetők száma, azt mutatja, hogy a helytelenül feltételezett analógia mellett igen sok tanulót a betükifejezés is "zavar", a betük mintegy sugallják a hiba elkövetését. Ennek oka, hogy a többtaguak szorzásszabálya nem konkrét formában él a tanulókban /tehát nem igy pl., hogy $2(5+7) = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7$ /, hanem az $a(b+c) = ab+ac$ általános formulában /amely különben tanitásunk célja is/, ezért mig a csak numerikus formában adott feladat megoldásánál legtöbben el is gondolkodnak a megoldás helyességén, addig a betüszámokkal adott feladatnál az $a(b+c) = ab+ac$ azonosság emlékezetben való megléte miatt különösebb meggondolás nélkül "ráhuzza" a többtényezős szorzatra is, vagyis $a(bc) = ab \cdot ac$ vagy $a(bc) = ab+ac$.

Meglátásom szerint a számfogalom bővitései során az egyes müveleteknek és a müveletek közös tulajdonságaira vonatkozó kommutativ, asszociativ és disztributiv tulajdonságok a tanulók számára üres, formális képletek maradnak. Sok tanár erősiti is ezt a hibát azzal, hogy elmulasztja, elsieti ezen tulajdonságok jelentőségének megmutatását, inkább csak formális elméletieskedésnek tekinti. /Hiszen a tanulók számára is nyilvánvaló, hogy $ab=ba$, $a+b=b+a$, $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a(bc)=(ab)c$, $a(b+c)=ab+ac$ jelszóval/. Hogy mennyire fontos a fent emlitett szabályok mélyebb begyakorlása és tudatositása, elmulasztását az 1. és 2. kisérlet eredménye is igazolja. Ha a tanulók tudatosan magukévá teszik a fenti müveleti tulajdonságokat és azoknak kombinált alkalmazását, tehát azt például, hogy

$$a(bc) = (ab)c = b(ac) = abc \ldots$$

A hibát elkövető tanulók száma erősen lecsökken.

<u>3. feladat</u>

X osztály	13 /52%/	hibátlan	8 /32 %/	hibás	4 /16%/	részben fogl.vele
Y "	24 /57%/	"	13 /31%/	"	5 / 12%/	"
U "	21 /46%/	"	20 /43%/	"	5 /11%/	"

Összesen 58 /51%/ hibátlan, 41 /37%/ hibás, 14 /12%/ részben foglalkozik a feladattal, ami azt jelenti, hogy nem végzi el teljesen a kijelölt müveleteket, hanem egy lépés elvégzése után a $-2(a+b)(c+d) = (-2a-2b)(c+d)$ vagy

$$-2(a+b)(c+d) = -2(ac+bc+ad+bd)$$ alakot véglegesnek

tekintik.

A 41 hibás dolgozatban a $-2(a+b)(c+d) = (-2a-2b)(-2c-2d)$ és $-2(a+b)(c+d) = -2a-2b(c+d)$ hibás elgondolások csaknem 50-50%-ban szerepelnek. A kisérlet eredménye a feltételezett hiba mellett az utóbbi hibát is felszinre hozta.
A zárójelek használatának szükségessége és a zárójelek jelentősége tehát sok tanulónál nem begyakorolt elem.

A hibázó tanulókkal kiegészitő kisérletet folytattam le. A feladatot $-2(a+b)(c+d)$ alak helyett $(a+b)(c+d)(-2)$ alakban adtam meg. A kisérleti eredmények azt muatják, hogy az eredeti alakban adott feladatot hibásan megoldó 41 tanuló közül 9 az ujabb alakban felirt feladatot helyesen oldotta meg, további nyolc tanuló $(a+b)(c+d)(-2) = (ac+bc+ad+bd)(-2)$ rész eredményt hozta ki. A kiegészitő kisérlet azt mutatja, hogy a tanuló általában a több taggal való szorzási szabályt tudja, ezért $(a+b)(c+d)(-2)$ alakban adott kifejezésnél gondolatilag ugy jártak el, hogy több tagot szorzok többtaguval /hiszen igy kezdődik a feladat/ és a kapott eredményt szorzom minusz kettővel. Vagyis nem a szabály nem tudásából származik a hibák zöme, hanem

a/ a helytelenül feltételezett analógiából:

$$-2(a+b)(c+d) = (-2a-2b)(-2c-2d)$$

b/ a zárójelek használatának hiányos ismeretéből:

$$-2(a+b)(c+d) = -2a-2b(c+d)$$

c/ a kommutativitás törvényének nem eléggé tudatos voltából.
A tanuló hajlamos arra, hogy a többtényezős szorzatoknál a kijelölés sorrendjében végezze el a szorzást /első tényezőt

szorzom a másodikkal, stb./. Meggyőződhettünk erről abból is, hogy pl. 2·8·5 szorzást több tanuló 2·8·5 = 16·5 = 80 sorrendben számitja ki, holott az ésszerüség nyilván 2·8·5 = 2·5·8 =10·8 sorrendet kiván. Ezen kisérlet eredménye is igazolja Menscsinszkaja azon megállapitását, hogy a "feladat megoldásánál a müvelet kiválasztása és a kapott eredmény értelmi kifejezésére közvetlen hatást gyakorolnak azok a kapcsolatok, amelyek a tanulók élettapasztalatában kialakultak azon sorrendjükben, amely számukra legmegszokottabb."/16/

Kisérlet

Ebben az osztályban a tanár különös figyelmet forditott a fenti hibák megelőzésére. A vizsgálatnál emlitett szempontokat, amelyektől e hibák számának csökkenését vártuk, szigoruan betartotta és betartatta. Az előjeltévesztés csökkentése céljából rászoktatta a tanulókat arra, hogy a müvelet elvégzése előtt /amennyiben ez lehetséges/ először a részeredmény illetve eredmény előjelét kellett leirni /nemcsak mondani!/ és csak ezután kezdhette meg a számok abszolut értékeivel való számolást. Több és nehezebb zárójeles feladatot oldatott meg, mint a vizsgálati osztályokban, amely feladatokban mindig meg kellett mondani, miért kell zárójelet alkalmazni, az egyes zárójeleknek "mettől meddig van hatáskörük", ha egyes zárójeleket elhagynánk, mennyiben módositaná az a feladat jelentését, megoldását és eredményét. Állandóan javittatta, ha valaki a szorzótényezők helyett a szorzat tagjairól beszélt. Többtényezős szörzatok esetében gyakorolták a tényezők csoportositását, felcserélését és rámutattak ennek jelentőségére./Mindezek természetesen arra vezettek, hogy ebben az osztályban a feladatok szám- és minőségbeli különbözősége miatt kevesebb idő jutott a szóbeli számonkérésre, a rendszeresebb feleltetésre. Ezt a hiányt azonban a többszöri "oszlopdolgozatos" eljárás pótolta./

A kisérlet eredménye:

1. feladat

23 /92%/ hibátlan 2 /8%/ hibás

Előjelet egy tanuló sem tévesztett. Két tanuló eredménye itt is 90 volt.

2. feladat

21 /84%/ hibátlan 4 /16%/ hibás

A négy tanuló közül egy tanuló előjelhibát vétett, tehát 3 tanuló követett el elvi hibát.

A kisérlet értékelése során kiderült, hogy a három tanuló közül egy tanuló olyan tipusu hibát követett el, amellyel előzőleg nem találkoztunk:

$$2a(-3b\cdot 4c) = (2a-3b)\cdot 4c = 8ac-12bc$$

Ez a hiba a csoportositás törvény "tulbuzgó" alkalmazásának következménye.

A harmadik feladatot a kisérleti osztályban nem adtam fel, mivel a vizsgálati osztályokban a kiegészitő kisérlet rámutatott a hiba okára és javitási módjára.

3. hiba

A törtes törtek /"emeletes törtek"/ előfordulása igen sok tanulóban félelemérzetet, ellenszenvet vált ki. Adott esetben ehhez hozzájárul az "emeletes tört" olyan hangnemben való emlegetése is, amely valami nagyra, igen nehézre való utalást jelent.

A törtes törtek körében elkövetett hibák csaknem mindig a fogalmak tisztázatlan voltából származó hibák, de sok esetben hozzájárulnak a hiányos alapismeretekből származó hibák is, / még mindig nem tudja vagy elfelejtette a közönséges törtekkel való müveletek szabályait/, továbbá a forma és tartalom egységének figyelmen kivül hagyása .

Az ide tartozó hibákat általában az

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}, \quad \frac{a}{\frac{b}{c}}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

alakban adott törtek problémáinak nevezhetjük.

Vizsgálat

Irják át a felsorolt három törtes törtet /"emeletes törtet"/ olyan törtalakba, hogy azokban csak egy törtvonal szerepeljen:

a/ $\dfrac{2}{\frac{3}{5}}$ b/ $\dfrac{\frac{2}{3}}{5}$ c/ $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$

A feladatban szereplő törteket olyan numerikus értékkel adtam meg, hogy az egyszerüsités mint lehetőség, ne vonja el a figyelmet, csupán a törtes törtek értelmezése és különböző alak-ja legyen a központi probléma.

A kisérlet eredménye:

	Hibátlan	1 hibás	2 hibás	3 hibás	Részben fogl. vele
X osztály	12 /48%/	6 /24%/	3 /12%/	2 /8%/	2 /8%/
Y "	15 /36%/	7 /17%/	8 /19%/	6 /14%/	6 /14%/
U "	15 /33%/	10 /22%/	9 /20%/	8 /17%/	4 /8%/

Azokat, akik részben foglalkoztak a feladattal, nem sorolom a hibázó tanulók közé, mert értik a törtvonalak jelentését, mivel dolgozatukban ilyen alakba irták át a törteket:

$$\frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{0,6} \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{\frac{3}{5}} = 2 : \frac{3}{5}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{5} = \frac{0,666\ldots}{5} \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{3} : 5$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{0,666\ldots}{0,714\ldots} = \quad \text{vagy} \quad \frac{2}{3} : \frac{5}{7}$$

/Ha szigoruan vesszük azt a tényt, hogy a tanuló a közönséges törteknek tizedestörtekkel való átalakitás utján igyekszik "megszabadulni" a törtes törttől, akkor nem nevezhetjük ezt általában csak formai hibának. A jelen feladatok közül az utóbbi kettőnél nem indokolt az egyenlőségjel a végtelen tizedestörtek miatt. Gyakran tapasztalhatjuk, hogy emiatt az egyenletmegoldásoknál csak közelitő megoldást adnak a tanulók. Különösen az exponenciális és logaritmikus egyenleteknél okoz ez problémát, amikor az ismeretlen pontos értéke általában táblázathasználat nélkül megállapitható lenne./

A 113 tanuló közül mindhárom példát hibátlanul 42 /37%/ tanuló oldotta meg, 16 /15%/ tanuló mindhárom példa megoldásánál elvi hibát vét. 23 tanuló a feladat 2/3 részét, 20 tanuló pedig csak 1/3 részét oldja meg helyesen. 12 tanuló részben foglalkozik a feladattal.

Legtöbb hibát az a/, legkevesebbet a c/ feladatnál találhatunk, a kettő között foglal helyet a b/ feladat. A hibák ilyen sorrendben való előfordulása nem véletlen. Többéves tapasztalatom és hibázó tanulókkal való beszélgetés alapján a következő okokra vezethető vissza:

1./ A törtekkel végzett müveletek szabályai közül legélénkebben a törttel való osztás-szabálya él az emlékezetükben. /A szabályban szereplő "reciprok" idegen szó nagymértékben hozzájárul a szabály megmaradásához./ A pongyola megfogalmazás /t.i. a legtöbben csak a "reciprok értékkel szorzok" formájában rögzitik, nem mondják hozzá, hogy az osztó tört reciprok értékével szorzok/ miatt azonban többen

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} \quad \text{helyett} \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{3}{2} \text{ -et irnak.}$$

A c/ példánál ezért az elmondottak miatt a legtöbb jó megoldás adódott, kivételt azok képeznek, akik az emlitett reciprokkal való szorzást rosszul alkalmazták.

2./ A c/ feladat aránylag sok jó megoldását az is elősegitette, hogy a tanulók hajlamosak arra, hogy a felirt három alak bármelyikénél felülről számitva az első két számot /2 és 3/ tekintsék törtnek, amelyet azután osztani kell / tehát a 2/3-ot / az alatta levő egésszel vagy törttel. Ezen okoskodás valóban a c/ és b/ példánál beválik, tehát emiatt csökken a rossz megoldások száma. A b/ példánál a c/-hez viszonyitva azért hibáznak többen, mert törtnek egésszel való osztási szabályát kisebb biztonsággal kezelik, mint a törtnek törttel való osztási szabályát.

Az elmondottak miatt az a/ példánál a hibázó tanulók száma mintegy megkétszereződik.

A hibák fentebb emlitett okainak ismerete a megelőzés illetve javitás módjait is tüstént kezünkbe adja:

a./ az általános iskolában megtanult szabályokat szigoru pontossággal átismételni és feladatok halmazával kinosan ujra begyakoroltatni.

b./ megmutatni és begyakoroltatni, hogy a törtes törteknél a törtvonalak különböző hosszuságura való huzásával / "fő" és "melléktörtvonalak"/ fejezzük ki, hogy az egészet illetve törtet kell-e osztani egésszel vagy törttel. /A törtvonal "per" szócskával való helyettesitése is hozzájárul a hibák elkövetéséhez. Nem szerencsés pl. $\frac{2}{\frac{3}{5}}$ ilyen formában való mondása vagy olvasása: "kettő per három per öt". Ez zavart okozhat a tanulókban. Helyette, ha "kettő osztva háromötöddel" beszédmódot használjuk, akkor a formaprobléma / a főtörtvonal hosszabbra huzása/ és ezzel együtt a kijelölt müvelet értelme egyszerre világossá vált. A most tárgyalt hibatipussal kapcsolatban nem folytattam le az előzőekben szereplő hasonló kisérletet, hanem tanitásaim során az elmondottak figyelembe vételével sikerült a hibákat csaknem teljesen kiküszöbölni.

4. hiba

Az algebrai kifejezések összevonásakor tapasztalható hibák felderitésére iktattam be a következő vizsgálatot.

Vizsgálat

Végezzük el az összevonásokat:

1./ $8a - 5a$

2./ $3x^2 + 5y^2 - x^2 - 6y^2 + 1$

A vizsgálat eredménye:

X osztály	19 /76 %/	hibátlan	6 /24 %/	hibás
Y osztály	37 /88 %/	"	6 /12 %/	"
U osztály	35 /77 %/	"	11 /23 %/	"

Bár egyszerüek voltak a feladatok, mégis a hibát elkövető tanulók százalékos aránya elgondolkodtató.

A példák megoldásánál a következő hibák előfordulását vártam:

1./ $8a - 5a = 3$ /vagyis a-ból kivonom az a-t az egyenlő nullával, ezután pedig 8-ból kivonom az 5-öt/.

2./ $3x^2 + 5y^2 - x^2 - 6y^2+1 = 2 - 1 + 1 = 2$ / az előző hibás elgondolás alapján./

Az 1/ hibatipus előfordulása nem váltotta be az előzetes "várakozást". Ugyanis 8a-5a összevonást a 113 tanuló közül 110 helyesen végezte el és csak 3 tanuló eredménye 8a-5a=3. /Mindegyik osztályból egy-egy tanuló./

A 2/ feladatnálm lényegileg ugyanugy kellett eljárni, mint az 1/ feladatnál, csupán másodfoku tagok szerepeltek az elsőfokuak helyett, továbbá az összevonásnál a tagok csoportositására is figyelemmel kellett lenni. / A csoportositás egy tanulónál sem jelentett problémát./ Ezért a hibás megoldásokat a már emlitett $3x^2+5y^2-x^2-6y^2+1=2$ alakban vártam. Az a három tanuló, akik az 1./ feladatnál elkövették az emlitett hibát, a második feladatban egy kivételével szintén hibáztak. A kisérlet fényt deritett olyan hiba előfordulására, amelyről már szó volt, illetve előre nem számitott hibára is. Ugyanis 12 tanuló szerint $3x^2-x^2=3$, vagyis x^2-ből kivonja az x^2-et, az egyenlő nullával és megmarad 3. Ez kétszeres hiba, hiszen nem veszi észre azt sem, hogy $3x^2-x^2=3x^2-1x^2$, vagyis az 1-es együttható elhagyása itt is kisért. Igy ezen 17 tanulónál az eredmény:

$$3x^2+5y^2-x^2-6y^2+1 = 3 - 1 + 1 = 3 .$$

7 tanulónál az eredmény $2x-y+1$ vagy $3x-y+1$.

Az első esetben észrevették az egyes együttható szerepét, a másodikban nem. Közös viszont a hibázás annyiban, hogy gondolatmenetük a következő:

$3x^2-x^2 = 2x$ /vagy $3x$/, mert a kivonás miatt a kitevőket is ki kell vonni, vagyis $2-2=0$, azaz akkor az x-nek "nincs kitevője". /A kitevők kivonása után x^0 hatványt kellene irni, de x^0 és $x=x^1$ közötti különbség nem tiszta előttük./

Több tanuló munkájában találkoztam ilyen irásmóddal:

$$3x^2 + 5y^2 - x^2 - 6y^2 + 1 = 2x^2 - 1y^2 + 1.$$

Ez nem hiba, hanem méginkább megerősiti az egyes együttható szerepét a gondolkodásban. Egyben a javitás egyik módszerét is sugallja, t.i. azt, hogy kezdetben mondjuk ki, hogy $5y^2 - 6y^2$ egyenlő minusz egy y^2-tel. /Később az "egy" szócska elmaradása nem okoz értelmi hibát./

A numerikus számolási hibákat nem tekintettem hibás megoldásnak /hiszen nem ez volt a célom/, csak az elvileg hibás megoldásokat vettem számitásba.

A vizsgálat eredményét összefoglalva azt mondhatjuk, hogy mindkét feladatot helyesen megoldók számához viszonyitva a hibát elkövetők száma lényeges.

A hibákat általános formában igy irhatjuk fel:

$$ax - x = a$$

$$ax - bx = a - b$$

$$ax^2 - bx^2 = (a - b)\ x$$

A hibák oka összetett:

a./ az együttható külön "él" a betükifejezéstől

b./ az egyes együttható elhagyása

c./ a hatványfogalom tisztázatlan voltából származó hiba

d./ formalizmuson alapuló hiba /a müveleti jelek önálló életre kelnek a kitevőkben is/.

Kisérlet

Ebben az osztályban a fent emliett hibák megelőzésére a gyakorlatok során több időt töltöttek el az algebrai kifejezések, az együttható és hatványozás fogalmával.

Nagyobb sulyt helyeztek az együttható, hatványalap, hatványkitevő és hatvány fogalmának tisztázására. Bevésettük a tanulókkal, hogy $a = 1a^1$ $-x = -1x^1$

Az egynemü és különnemü algebrai kifejezések hangsulyozottabb megkülönböztetése után belátták, hogy az egynemüek összevonásánál formailag az összevonást az együtthatókkal végezzük, amelyek előjeles számok összevonását jelentik.

Az együttható tiszta fogalmát zavarja az olyan megállapitás, hogy az együttható az egytaguban szereplő számtényező, amelyet első tényezőnek szokás irni. Ez később hibaforrássá válik, pl. a másodfoku egyenlet gyökképletének alkalmazásánál. Több tanuló pl. $3x(a^2- bc)$ kifejezés együtthatóját /ahol a,b,c adott mennyiségek/ 3-nak veszi, holott $3(a^2- bc)$.

A kisérlet végrehajtása után megnyugtató eredményt kaptunk, a 25 tanuló közül 22 hibátlanul oldotta meg a feladatot. A hibázó 3 tanuló közül egy tanuló az összevonások során numerikus hibát követett el, 2 tanulónál a második feladat eredménye itt is 3 volt.

5. hiba

Ide sorolom a kiemeléssel való szorzattá alakitás során elkövetett hibákat. Általános formulával a tapasztalt hibákat igy irhatjuk le:

1./ $ab + b = ba$

2./ $ab + b = 2ba$

3./ $ab + b = b(ab)$

Az 1./ hibánál igy okoskodik a tanuló:

$$ab + b = b(a + 0) = ba$$

A hiba oka nyilvánvalóan abban van, hogy a kiemelésnek mint algebrai müveletnek a fogalma nem tiszta. A b kiemelését a b "elvonásával" helyettesiti.

Nincs tisztában azzal, hogy a kiemelés a többtagu egytaguval való szorzásának forditott müvelete:

$$ab + b = b(a + 1) \quad , \text{mert}$$

$$b(a + 1) = ab + b$$

Azt is mondhatnánk, hogy a disztributiv törvény azonosság alakjában való felirásánál / $a(b+c)=ab+ac$ / nem tudatositották kellő módon, hogy "balról jobbra" haladva és visszafelé is igen fontos szerepe van ennek az azonosságnak.

A 2./ hibánál a tanulót a "szorzattá alakitás" kifejezés arra "serkenti", hogy b-t összevonja b-vel, igy

$$ab + b = a2b = 2ba$$

A tanuló ezen helytelen elgondolása abból származik, hogy "szorzat" elnevezésen csak olyan szorzatra gondol, amelyben nem szerepel plusz vagy minusz jel. Nem gondol pl. ilyen szorzatra

$$2a^2b(3a + 5)(b - 2)$$

A szorzótényező ezeknél a tanulóknál az egytaguakra korlátozódik, ha plusz vagy minusz jelet látnak, akkor csak az összeg vagy különbség tagjainak tudják tekinteni őket. A plusz vagy minusz jeltől való szabadulás /tehát,hogy tényezőket kapjon/, nem véletlenül vezet az ab+b=2ba eredményhez, ez összefügg a már tárgyalt ax-x=a hibával.

A 3./ hiba esetében a tanuló elgondolása a következő:

$$ab + b = b(a + b) = b(ab)$$

Kétszeres hibát vét a tanuló, mert az első lépésben csak az első tagból emel ki b-t. Ez egyrészt a fogalom tisztázatlan voltából származó hiba, másrészt téves analógián alapuló hiba, ugyanis tudja azt a szabályt, hogy szorzatnak csak az egyik tényezőjét szorozzuk, és mivel itt is szorzat szerepel a felszólitásban, igy a kiemelést is igy akarja elvégezni, a második lépésben pedig a 2./ alatti pszichikai tényező is szerepet játszik. / az a+b tényező ab alakot kap, mert igy szorzat/

A fent elmondottakat a vizsgálati eredmények és a tanulókkal való személyes beszélgetések igazolták. A vizsgálat folyamán az volt a tanulók feladata, hogy a következő kifejezéseket alakitsák szorzattá a kiemelés módszerével:

1./ $a^2b + b$

2./ $-2a^5b^2 + 4a^6b^3 - 2a^2b^2$

Az irásbeli munkák értékelése után a következő képet kaptuk:

X osztály	18 /72%/	hibátlan	7 /28%/	hibás
Y osztály	31 /74%/	"	11 /26%/	"
U osztály	32 /69%/	"	14 /31%/	"

A hibák többsége a fentiekben tárgyalt hiba volt. Tapasztalhattunk azonban olyan hibákat is, amelyek nem mondhatók tipikusnak, mivel előfordulásuk ritkább, mint a már emlitett hibák előfordulása. Pl. $a^2b + b = ab(a + 1)$, vagy $a^2b+b=a^2b^2$. Néhány tanulónál a szorzattá alakitás igy néz ki:

$$a^2b + b = (a + b)(a - b)$$

Nyilván számukra a szorzattá alakitásnak csak az az egy módja létezik, amely az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ alakban él emlékezetükben és ezt akár lehet, akár nem, alkalmazzák. Nem számoltam a hibát elkövetőkhöz azokat a tanulókat, akik előjelhibát követtek el, vagy a 2./ feladatban $2a^2b^2$ helyett csak 2ab-t, vagy $2a^2$-et, stb. emeltek ki.

Bár az 1./ feladat egészen egyszerü, könnyebben áttekinthető, mint a 2./ feladat,a hibák előfordulása ezt a különbséget nemigen mutatja. A vizsgálatban szereplő tanulók csaknem azonos számban követnek el hibát az 1./ és 2./ feladatban, de még többen vannak, akik mindkét feladatot hibásan oldják meg.

A fogalom tisztázatlan voltának bizonyitására a következő feladatot adtuk fel a tanulóknak:

Alakitsuk szorzattá $-2ab^2$ kiemelésével a következő kifejezést: $-2ab^2 - 4ab^2c + 2ab$

Az eredmény:

X osztály	8/32%/	hibátlan	11/44%/	hibás	3/12%/	nem fogl. vele	3/12%/	részb. fogl. vele
Y	"	9/21%/	"	24/57%/	"	4/9 %/	"	5/13%/	"
U	"	11/24%/	"	28/60%/	"	3/7 %/	"	4/ 9%/	"

A vizsgálat eredménye azt bizonyitja, hogy nem érett meg a tanulókban a kiemelés fogalma, sokkal több időt kell forditani a kiemelés témakörére, több oldalról kell azt megvilágitani.

Akik foglalkoztak a feladattal, azoknál tipikus hibaként jelentkezett a következő:

1./ $-2ab^2 - 4ab^2c + 2ab = -2ab^2(1 + 2c) + 2ab$

/Tehát végeredménynek tekintik ezt az összeget./

2./ $-2ab^2 - 4ab^2c + 2ab = -2ab^2(0 + 2c - 1) = -2ab^2(2c - 1)$

Igen sok tanuló ráirta a feladatlapra, hogy "nem lehet kiemelni $-2ab^2$-et, mert nem szerepel mindegyik tagban tényezőként". /Ezt a hiedelmet táplálja az olyan meghatározás is, hogy "ha az összeg minden tagjában tényezőként szerepel ugyanazon szám, akkor az összeg szorzattá alakitható."/

Számos tanuló ugy segitett magán, hogy sajtóhibának minősitette a feladatban szereplő 2ab tagot, kijavitotta és

$$-2ab^2 - 4ab^2c + 2ab^2$$

alakban végezte el a kiemelést, mig mások a kiemelésre előirt $-2ab^2$-et javitották ki $-2ab$-re és igy végezték el a kiemelést.

A vizsgálati eredmények értékelése tüstént kezünkbe adja az említett hibák megelőzésének módszereit is:

1./ A disztributivitás törvényének mint azonosságnak a fokozottabb tudatositása. A kiemelés elvégzése után kezdetben követeljük meg az ellenőrzést az $a(b+c) = ab+ac$ azonosság alapján.

2./ Az előző módszer eloszlatja a tanulókban azt a téves elgondolást, hogy a kiemelés után a zárójelben levő tagok nem kivonás utján adódnak, hanem osztás utján.

3./ A kiemelés tárgyalása előtt csináltassunk ilyen jellegü feladatokat:

Mivel kell szorozni $2ab^2$-et, hogy 2ab-t kapjunk ?
Irjuk fel 3ab-t ugy, hogy egyik tényező $3ab^2$ legyen, vagyis $3ab = 3ab^2 \cdot \frac{1}{b}$ alakban. Stb...

4./ A sablonos kiemeléseken kivül csináltassunk olyan feladatokat is, amelyeket nevezhetünk "előirt feltétel szerinti kiemelés"-nek, mint pl. $2a^2b + b$ kifejezésből emeljük ki a 2ab-t.

A 3. és 4. javitási lehetőséget az algebrai törtek fogalmának, és az algebrai törtekkel végzett müveletek tisztázása után használhatjuk fel a legtudatosabban mintegy alkalmazásként visszatérünk a kiemelés problémájára. A tárgyalt hibával kapcsolatos kisérletet nem hajtottam végre, mivel bőven volt alkalmam ezekkel a hibákkal és javitásukkal foglalkozni gyakorló munkám során. A kiemeléssel kapcsolatos hibák a tanulókat a későbbi előrehaladásuk során számos témakörnél zavarják, igy:

a. egyszerü gyakorló feladatok megoldásánál
b. algebrai törtek egyszerüsitésénél
c. paraméteres egyenletek és egyenletrendszerek megoldásánál
d. $y = Ax^2 + Bx + C$ alakban adott parabolának $y = a(x - u)^2 + v$ alakban való megadásánál
e. csonkagula térfogatképletének, a másodfoku egyenlet megoldóképletének, stb. levezetésénél.

Az elmondottak is bizonyitják, hogy kristálytiszta és kellően begyakorolt fogalommal kell ellátni a tanulókat, amelyhez tapasztalatom szerint a tárgyalt javitási eljárások hozzásegitenek bennünket.

6. hiba

Az algebrai törtek témakörében sok olyan tipikus hibával találkozhatunk, amelyek a tanulók későbbi teljesitményét is nagymértékben lerontják. Ha nem forditunk kellő figyelmet ezekre a hibákra, akkor az egyenletek megoldása során lépten-nyomon tapasztaljuk e hibák hatását. A tanuló a legtöbb algebrai átalakitásban bizonytalan lesz és hibák egész sorát követi el.

Vizsgálat

A felsorolt nyolc törtpár közül melyek közé irhatunk egyenlőségjelet ? Irjuk be ezeket az egyenlőségjeleket és indokoljuk meg !

$$\frac{a-2}{b-4} \qquad \frac{2-a}{b-4}$$

$$\frac{a-2}{b-4} \qquad -\frac{2-a}{b-4}$$

$$\frac{a-2}{b-4} \qquad \frac{a-2}{4-b}$$

$$\frac{a-2}{b-4} \qquad -\frac{2-a}{4-b}$$

$$\frac{a-2}{b-4} \qquad -\frac{a-2}{4-b}$$

$$\frac{-/a-2/}{-/b-4/} \qquad \frac{a-2}{b-4}$$

$$\frac{-/a-2/}{b-4} \qquad \frac{a-2}{4-b}$$

$$\frac{a-2}{-/b-4/} \qquad \frac{-/a-2/}{4-b}$$

A felsorolt egyszerü feladatokban tulajdonképpen az

$$\frac{a}{b}, \frac{-a}{b}, \frac{a}{-b}, \frac{-a}{-b}, -\frac{a}{b}$$

kifejezések közötti összefüggés illetve különbözőség felismerését kivántam vizsgálni annyi különbséggel, hogy kéttagu volt a számláló is és a nevező is. /A felsorolt alakok tisztázása tapasztalatom szerint valahogy elsikkad. Az általános iskolában a $-\frac{a}{b}$ alakkal foglalkoznak számpéldák során, de a többivel nem, a középiskolában pedig ugy tekintjük, mintha az általános iskolában már begyakorolták volna./

A vizsgálat eredménye:

	4 találat	3 találat	2 találat	1 találat	0 találat
X osztály	8/32 %/	3/12 %/	4/16 %/	5/20 %/	5/20 %/
Y "	10/24 %/	7/17 %/	6/14 %/	8/19 %/	11/26 %/
U "	7/15 %/	8/17 %/	10/22 %/	11/24 %/	10/22 %/

A "4 találat" azt jelenti, hogy megtalálta mind a négy egyenlőséget, de a többihez egyikhez sem tett egyenlőségjelet. Az alacsonyabb találatot elért tanulóknál általánosnak mondható, hogy a helyes találatok mellett több olyan törtpár mellé is egyenlőségjelet irtak, amelyek nem egyenlőek. Azok, akik az egyenlőségjelek leirásakor a "szerencsére bizták magukat", nyilvánvalóan elérhettek bizonyos számu találatot, de mivel indokolni is kellett a beirást, igy a "szerencse" szerepét lecsökkentettem. Az értékelésnél azokat a találatokat fogadtam el, amelynek indoklása is helyes volt.

A fenti táblázat százalékos értékei is mutatják, hogy valóban még az ilyen egyszerü feladatok is probléma elé állitják a tanulókat. Mégjobban láthatjuk az eredményt illetve az eredménytelenséget, ha észrevesszük, hogy az X osztály az elérhető

100 találatból csak 54-et, az Y osztály 168-ból 81-et, az U osztály pedig 184-ből 83-at ért el. Igy az egyes osztályok, mint csoportok teljesitménye:

X	osztály	54%-os	teljesitmény
Y	"	49%-os	"
U	"	45%-os	"

A feladatlapon irt indoklások és a tanulókkal való egyéni beszélgetések arra mutatnak, hogy a hibák oka elsősorban a fogalom tisztázatlan volta. Tudják ugyan azt a szabályt, hogy a tört értéke nem változik, ha számlálóját is és a nevezőjét is ugyanazzal a számmal szorozzuk, de ez a szabálytudás nem teljesitőképes, különösen, ha betük is szerepelnek, csak üres forma, verbális tudás. A tört előtti minusz előjelben kevesen fedezik fel, hogy ez tulajdonképpen /-1/-gyel való szorzást is jelent. Sokak számára a minusz jel csak müveleti jel /a kivonás jele/, és nem tudják összekapcsolni a számok előjelével /különösen akkor, ha ez a szám az egyes/.

A beszélgetésekből az is kiderült, hogy a törtvonalnak és az osztásnak /:/ jele nem azonosult a tanulókban kellő mértékben, ugyanis, ha a feladatot:

$$\frac{a}{b}, \frac{a}{-b}, \frac{-a}{b}, \frac{-a}{-b}$$

alak helyett

a:b , a:/-b/, /-a/:b , /-a/:/-b/

alakban adtam fel, akkor a hibázó tanulók egy része az előjeles számokkal való osztás szabálya alapján jobban meg tudta jelölni a megegyező illetve a különböző értékeket.

Az indoklások között több tanuló megemliti:

" $\frac{a-2}{b-4} = -\frac{2-a}{4-b}$, mivel az egyik törtet /-1/-gyel megszorozzuk, és akkor a másik törtet kapjuk."

/Ez már magában hordja annak a hibának a veszélyét, amellyel az egyenletek megoldásánál találkozunk, ugyanis amikor "elfelejti" beszorozni az egyenlet másik oldalát is./

Vagy:

" $\frac{a-2}{b-4} = -\frac{2-a}{b-4}$, mivel a második tört számlálójában felcseréltük a kivonandók sorrendjét, amely azt eredményezte, hogy a tört előjele megváltozott."

/Tehát a /-1/ kiemelését azonositja a "kivonandók" sorrendjének felcserélésével, bár az egyenlőség beirása helyes./

Vagy:

" $\frac{a-2}{b-4} = -\frac{2-a}{4-b}$, mert $-\frac{2-a}{4-b} = \frac{-/2-a/}{-/4-b/} = \frac{a-2}{b-4}$ "

/Vagyis a törtvonal előtti minusz jel a számlálóra és nevezőre egyszerre érvényes, hiszen a tört értéke igy nem változik./

A fenti első és harmadik elgondolás miatt a sok hiba közül a legjellemzőbbek voltak:

$$\frac{a-2}{b-4} = \frac{2-a}{b-4}$$

$$\frac{a-2}{b-4} = \frac{a-2}{4-b}$$

$$\frac{a-2}{b-4} = -\frac{2-a}{4-b}$$

A vizsgálat és a magam oktató munkája is megmutatta, hogy az algebrai törtek tanitása a középiskolai tananyagnak az a része, amely talán a legtürelmesebb, legnagyobb körültekintést és a legtöbb gyakoroltatást igényli. Nem lehet ezt az anyagrészt könnyen elintézni azzal a szemlélettel, hogy a közönséges törtek tanításánál a szabályokat ugyis megtanították már, most csupán olyan törtekre alkalmazzuk ezeket, amelyekben betük is szerepelnek.

Kisérlet

Ebben az osztályban a szaktanár által előirt gyakorlási feladatok közé beiktattunk olyan feladatokat, amelyektől a tapasztalt hibák megelőzését vártuk.

1./ Irjuk fel tört alakjában a következő algebrai kifejezéseket:

$a : 3$

$4 : b$

$/a - b/ : 5$

$a^2 : /a + b/$

$/5a - 3b/ : /a - b/$

$/x^2 + x - 1/ : /2x^2 + 1/$

2./ A következő kifejezések közül melyiknek változik meg az előjele, ha "x" előjelét ellenkezőjére változtatjuk:

$$\frac{5}{x}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{1}{x^3}, \quad \frac{x^2 + 1}{x^2}, \quad \frac{x^2 + 1}{x}, \quad \frac{x}{x^2 + 4}$$

3./ Alakitsuk át a következő törteket ugy, hogy se a számlálóban, se a nevezőben ne legyen minusz jel:

$$\frac{-3x}{-5y}, \quad \frac{6a^2}{-5b}, \quad -\frac{-3a}{4b}, \quad -\frac{-x}{-y}, \quad -\frac{3a^2}{-b}$$

4./ Alakitsuk át a következő törteket ugy, hogy a törtek előtt minusz előjel álljon:

$$\frac{1 - a}{a}, \quad \frac{b}{1 - a}, \quad \frac{a - b}{c + d}, \quad \frac{-a - b}{c + d}$$

A feladatok megoldása során a vizsgálatban szereplő hibákat előidéző jelenségekkel bőven volt alkalma foglalkozni a szaktanárnak. Az előismereteket felfrissithette, illetve kapcsolatba hozhatta az uj fogalommal. A tanulók nem a "minusz jel kiemelését," hanem a /-1/ kiemelésének, vagy /-1/-gyel való szorzásnak-osztásnak a kapcsolatát látták meg az előzőekből ismert szabályokkal.

A kisérlet eredménye:

4 találat	3 találat	2 találat	1 találat	0 találat
13 /52%/	4 /16%/	4 /16%/	3 /12%/	1 /4%/

Az elérhető 100 találatból 75 találatot ért el az osztály, amely 75%-os teljesitményt jelent az X osztály 54%-ös teljesitményével szemben.

7. hiba

Szintén az algebrai törtek témakörénél tapasztalható hibát, illetve hibacsoportot vizsgáltam a következő feladatok megoldása kapcsán:

Vizsgálat

Egyszerüsitsük a következő törteket:

1./ $\frac{a^3}{a^4}$

2./ $\frac{ab}{a^2}$

3./ $\frac{3x^2y}{6x^2yz}$

4./ $\frac{2a^3b^2}{a^3b^2}$

A vizsgálat értékelését bontsuk fel példákra, hiszen az egyes példáknál elkövetett hibák forrása általában különböző.

1.példa

A vizsgálat eredménye:

X osztály	14 /56%/	hibátlan	7 /28%/	hibás	4/16%/	részben fogl. vele
Y "	22 /52%/	"	13 /31%/	"	7/17%/	"
U "	26 /56%/	"	17 /37%/	"	3 /7%/	"

A 37 hibázó tanuló közül 27 tanuló eredménye:

$$\frac{a^3}{a^4} = a$$

Ezek a tanulók hibás analógia alapján kapják az "eredményt".

Ugyanis elősször olyan jellegü egyszerüsitésekkel találkoznak, amikor a számláló magasabb fokszámu, mint a nevező.

Pl. $\frac{a^4}{a^3} + \frac{a}{1} = a$

Ezt az észrevételüket igyekszenek érvényben tartani /hiszen a két feladat hasonlit egymáshoz/, nem veszik észre, hogy a feltételek nem azonosak.

A tanulókkal való egyéni beszélgetésekből kiderült, hogy az egyszerüsités fogalma sem tiszta sokaknál. A számláló és nevező közös tényezőivel való egyszerüsitést /amely a számláló és nevező osztását jelenti ugyanazzal a számmal/ a kivonással helyettesitik igy: "a számláló három a-t /vagy 3-szor a-t/ a nevező négy a-t tartalmaz, igy egyszerüsités után marad egy a" - de hogy az a számlálóban vagy a nevezőben marad-e, az már nem lényeges. Ehhez a téves elgondoláshoz hozzájárul annak a szabálynak a pongyola rögzitése is, hogy: "egyenlő alapu hatványokat igy is oszthatunk: a számláló kitevőjéből kivonjuk a nevező kitevőjét, és a közös alapot erre a kitevőre emeljük." Ugyanis a megkérdezett tanulók egy része ezt a szabályt igy rögziti emlékezetében: "egyenlő alapu hatványokat ugy osztunk, hogy a kitevőket kivonjuk" /Ennek oka, hogy a szorzásra vonatkozó hasonló szabálynál valóban mondhatjuk, hogy a kitevőket összeadjuk./

A hamis analógia mellett a fogalom tisztázatlan voltának szerepére utal az a tény is, hogy 8 tanuló megoldása:

$$\frac{a^3}{a^4} = a^{3-4}$$

Tovább nem haladnak, hiszen a nulla, negativ és törtkitevő csak a következő évben kerül bevezetésre. Ez felfogható ugyis, hogy a tanulóknál igényként lép fel a negativ kitevő kérdése, de méginkább mondhatjuk, hogy formális tudással birnak. Ahelyett, hogy közös tényezők szempontjából gondolkodnának, a kitevők érdekesek számukra, mert a szabály is

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \qquad / \, r > s \, /$$

ezt mondja. Mondhatjuk, hogy ezen tanulók esetében a gondolkodás utja nem járta végig a konkrét-absztrakt-konkrét utat.

Három tanuló $\frac{a^3}{a^4} = a^7$ megoldást ad, az egyenlő alapu hatványok szorzásának szabályát "igyekszenek" alkalmazni.
Négy tanuló eredménye: $\frac{a^3}{a^4} = \frac{3}{4}$, amely a hatványfogalom teljes zavarára utal.
Három tanuló $\frac{a^3}{a^4} = a^{4-3}$ alakot ad meg, amely a már emlitett pongyola szabályrögzités eredménye.

Azokat a tanulókat, akik részben foglalkoztak a feladattal, nem sorolom a hibát elkövetőkhöz, mert vagy az $\frac{a^3}{a^4} = a^{3-4}$, vagy $\frac{a^3}{a^4} = \frac{a}{a^2}$ eredményt tekintették megoldásnak. Az előző alak eredetéről már szóltam, nem kevésbé fontos megnézni, vajon miért tekintették végeredménynek a második alakot ? - "Azért nem lehet tovább egyszerüsiteni, mert a számlálóban akkor már nem szerepelne semmi." - mondták többen. Vagyis az a-nak az elvonásával gondolják az egyszerüsitést és az igy kapott $\frac{0}{a}$ már nem tört - szerintük.
"Mivel a számlálóban a-nak nincs már kitevője, igy tovább nem egyszerüsithető, ez a legegyszerübb alak." - mondták mások.
Ime ismét előjött a már tárgyalt $a=1 \cdot a^1$ kérdése.

2.példa

Azért adtam ezt a példát, hogy a számlálóban az a-n kivül szerepeljen egy másik betü is. Ez a b szám elősegitette a hibátlan megoldások számának növekedését, bár strukturájában nehezebb az első példánál. Itt bátrabban egyszerüsitettek a-val, mivel a számlálóban még marad betü, a b , tehát mintegy megerősitik az eredmények az első példánál fellépő hiba okának megállapitását. Gondolatukban ez ment végbe az első példánál:

$$\frac{a^3}{a^4} = \frac{\cancel{a}\,\cancel{a}\,\cancel{a}}{\cancel{a}\,\cancel{a}\,\cancel{a}\,a} = \frac{?}{a}$$

A második példánál a b segitett a kérdőjel feloldásában:

$$\frac{ab}{a^2} = \frac{\cancel{a}\,b}{\cancel{a}\,a\,a} = \frac{b}{a^2}$$

Természetesen a második példánál is több tanuló hibát követett el, hasonló okok miatt, mint az első példánál, de a 113 tanuló közül 92 tanuló helyes eredményt adott meg. A hibázó tanulók tipushibája – mint ahogy ez az első példa tapasztalata alapján várható volt – két változatban jelentkezett:

$$\frac{ab}{a^2} = ab$$

$$\frac{ab}{a^2} = \frac{b}{2}$$

3.példa

Ez a példa az előző példáktól abban különbözött, hogy egyrészt több betü szerepelt benne, másrészt konstans tényezőket is tartalmazott, amelyeknek szemmel láthatóan van közös törzstényezőjük.

A vizsgálat eredménye:

X osztály	11/44 %/ hibátlan	10/40 %/	hibás	4/16 %/	részben fogl. vele	
Y "	18/43 %/	"	17/40 %/	"	7/17 %/	"
U "	21/45 %/	"	19/41 %/	"	6/14 %/	"

Az első példa vizsgálati eredményével összehasonlitva láthatjuk, hogy még több a hibát elkövető tanulók száma. Az x és y betük nem okoztak különösebb gondot /mivel a számlálóban is és a nevezőben is ugyanolyan hatványon szerepelnek/, annál több hibát követtek el a z-érték illetve a konstansok vonatkozásában. Az első példa alapján természetes, hogy sok tanuló megoldása igy néz ki:

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{A}{B}z \qquad \text{/ahol A és B konstansok/}$$

A konstansok értéke a következőképpen alakult:

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{1}{2}z \qquad \text{/ 16 tanuló /}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = 2z \qquad \text{/ 10 tanuló /}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = 3z \qquad \text{/ 7 tanuló /}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{1}{3z} \qquad \text{/ 6 tanuló /}$$

Az első esetben helyesen adják meg a konstans értékét, de a z-t a már emlitett okok miatt nem a nevezőbe irják.

A második esetben a konstans is arra a "sorsra" jut, mint a z.

A harmadik változatban kettős hiba fedezhető fel, elkövetik az előző hibát és $6x^2yz - 3x^2y = 3z$ alakban okoskodnak.

A negyedik hiba a harmadiknak egy szépitett formája, mivel a számláló és a nevező megkapja a maga helyét, de az egyszerüsitést az elvonással helyettesitik. /$6x^2y$-t "egyszerüsitve" $3x^2y$-nal "marad" 3./

Azok a tanulók, akik részben foglalkoztak a feladattal, nem végezték el az összes lehetséges egyszerüsitést, hanem megálltak a következő alaknál:

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{x^2y}{2x^2yz}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{3y}{6yz}$$

$$\frac{3x^2y}{6x^2yz} = \frac{y}{2yz}$$

4. példa

A vizsgált alaku algebrai törtek egyszerüsitésénél előforduló hibák és ezek okának pontos meghatározása érdekében végezetül a következő példát kellett a tanulóknak megoldani:

$$\frac{2a^3b^2}{a^3b^2}$$

A 113 tanuló közül csak 8 tanuló adott helytelen megoldást, hiszen itt az előző példában hibákat kiváltó okok hiánya miatt a hibák is elmaradtak.

A hibázó tanulók

$$\frac{2a^3b^2}{a^3b^2} = a^3b^2$$

eredményt kapták, amely alátámasztja azt a megállapitást, hogy $3a^3b^2 - 2a^3b^2 = a^3b^2$ kivonás utján végzik az egyszerüsitést.

Az 1-4. példákban tárgyalt részletes vizsgálat, a tanulókkal való egyéni beszélgetés sokoldaluan feltárta a hibák eredetét, de megmutatja egyben a javitás és megelőzés lehetőségeit is. Tapasztalatom és meggyőződésem, hogy a fenti hibák előfordulási számát – a vizsgálatban tisztázott okok ismeretében – eredményesen csökkenthetjük. Tanitásunk során különösen nagy figyelmet forditsunk:

1./ Az algebrai kifejezés, hatványozás és müveletek hatványokkal témakörre.

2./ Az algebrai tört fogalmának tisztázására.

3./ Az egyszerüsités " "

4./ Az ismeretszerzés konkrét–absztrakt–konkrét utjára.

5./ Nem szabad lebecsülni a "kis példák" szerepét. A példatár egész sor olyan feladatot tartalmaz, amelyekre a tanulóknak szóban kell válaszolni, és éppen ezek teszik tudatossá a szabályok alkalmazását. Az ilyen egyszerü feladatok után adjuk csak a nehezebb feladatokat.

6./ Az elméleti megalapozás elsietése ugyanazzal a veszéllyel jár, mint a tudományokban az alapkutatások elhanyagolása. /Ha csak a gyakorlati alkalmazásokat hajszolva dolgozunk, előbb–utóbb megrekedünk, nem tudja betölteni tudományunk a "termelő eszköz" szerepét./

8. hiba

Nem kevesebb azoknak a hibáknak a száma, amelyeket a tanulók a többtagu számláló vagy nevező esetében követnek el az algebrai törtek egyszerüsitésénél,átalakitásánál.

A 6. és 7. hibánál megállapitott okok természetesen ebben az esetben is fennállnak, sőt nyomatékosabb a kiemelés, szorzattá alakitás okozta nehézség hatása.

Vizsgálat

Egyszerüsitsük a következő törtet:

$$\frac{4ab - 2}{2ab}$$

A vizsgálat a következő képet mutatta:

X osztály	14 /56%/	hibátlan	11/44%/	hibás
Y "	21 /50%/	"	21/50%/	"
U "	20 /43%/	"	26/57%/	"

A feladattal mindenki foglalkozott, igy csak hibátlan és hibás megoldásokat értékelhettünk.

A vizsgálat igazolta a feltételezett hibák előfordulását, ugyanis a következő tipushibák adódtak:

a./ $\frac{4ab - 2}{2ab} = 2ab - 2$ / 26 tanuló /

b./ $\frac{4ab - 2}{2ab} = 0$ / 18 tanuló /

c./ $\frac{4ab - 2}{2ab} = 1$ / 14 tanuló /

Mindhárom tipusu hibára egyaránt vonatkozik, hogy tévesen feltételezett analógia következményei. Ugyanis közös vonásuk, hogy az "ab-vel való egyszerüsités" tényét használták fel. Az előző anyagrészben csak olyan törtekkel foglalkoztak, amelyeknek számlálójuk és nevezőjük is egytagu volt. Ezeknél a törteknél látták, hogy ha a számláló és a nevező tartalmaz ugyanolyan betüt, vagy annak valamilyen hatványát, akkor a számlálóból és nevezőből is lehuzhatjuk, pl. :

$$\frac{a^2bc}{a^2b^3} = \frac{\cancel{a^2}\cancel{b}c}{\cancel{a^2}\cancel{b^3}2} = \frac{c}{b^2}$$

Ezt a formális szabályt igyekszenek érvényben tartani a többtagu számláló esetében is.

A hamis analógián kivül a fogalom tisztázatlan volta is e hibás elgondoláshoz vezeti a tanulót. Ugyanis mindhárom esetben észrevehető az ab-vel vagy a 2ab-vel való egyszerüsités gondolata hamis analógiára való hivatkozással /amiből következik, hogy a számlálónak csak az egyik tagját veszik figyelembe az egyszerüsitésnél/, de az első két esetben az egyszerüsités a 2ab-nek a számlálóból való elvételét /elvonását/ jelenti.

Az egyszerüsitésnél "amivel egyszerüsitünk, az megszünik" elv alapján az a./ esetben "megszünik" vagy "eltünik" a nevező 2ab-je, a számlálóból pedig ezt a 2ab-t elveszi és igy adódik eredményül a 2ab - 2.

A b./ esetben ezt a téves elgondolást még tetézik azzal, hogy a számlálóból a 2ab-t igy vonják ki:

$$4ab - 2ab = 2 \quad \text{/erről a hibáról máR szóltam/}$$

Igy lesz az eredmény:

$$\frac{4ab - 2}{2ab} = 2 - 2 = 0$$

A c./ tipusu hiba még a legszerencsésebb eset, mert ebben az esetben csak a hamis analógia inditja a tanulót arra, hogy csak az egyik tagot egyszerüsitse:

$$\frac{4ab - 2}{2ab} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Kisérlet

A vizsgálat feltárta az előforduló hibákat és azok okait. Az okok ismeretében a javitási és megelőzési eljárások szinte kinálják magukat.

1./ Az egytagu és többtagu algebrai kifejezések fogalmának felujitása.

2./ A tag és tényező közötti különbség meglátásának és mondásának szigoru megkövetelése. Begyakoroltatni, hogy pl. a következő kifejezések hánytaguak, illetve hány különböző szorzótényezőt tartalmaznak:

$$\frac{2a^2b}{3a^3bc}, \quad \frac{-/3a^2 - b/}{2ab}, \quad \frac{5a^2b/3a^3b - 2cd/}{3/a - b//a + b/}$$

Az utolsó kifejezés példa lehet arra is, hogy elősször "külső forma" alapján jellemezzük a kifejezést /tört, melynek számlálója és nevezője is szorzat/ és ezután bontsuk "finomszerkezet" szempontjából részekre /a tényezők számok, hatványok, különbségek, összegek/. A tanuló ugyanis, ha (+) vagy (-) jelet lát, akkor már csak összeg, különbség jelenik meg előtte /ami természetes is/, és kevesen vannak olyanok, akik ezeknek az összegeknek vagy különbségeknek a kifejezésben elgondolt helyzetét, szerepét is meglátják. /Tudnillik olyan tényező, amely összeg vagy különbség/. Ezzel megelőzzük a tanuló kételyét olyan esetben, amikor összeggel vagy különbséggel mint tényezővel egyszerüsitünk. /Mondani szokták egyesek ezen esetekben: "azt tanultuk, hogy tényezővel egyszerüsitünk, hogyan lehet akkor mégis összeggel vagy különbséggel egyszerüsiteni?"/

3./ A kiemeléssel és egyéb szorzattá alakitási eljárásokkal szorosan összekapcsolni az egyszerüsités fogalmát.

4./ Annak a szabálynak, hogy a számláló és nevező közös tényezőivel történik az egyszerüsités, összekapcsolása azzal, hogy a többtagu számláló minden tagját egyszerüsitjük.

A $$\frac{4ab - 2}{2ab} = \frac{2/2ab - 1/}{2ab} = \frac{2ab - 1}{ab}$$

müveleti sort kezdetben igen kamatoztató megkövetelni a

$$\frac{4ab - 2}{2ab} = \frac{2ab - 1}{ab}$$

helyett. Ugyanis igy tud kapcsolatot teremteni a tanuló a kiemelés , szorzattáalakitás, tényezőkkel való egyszerüsités és a tagonként való egyszerüsités között. Gyakorlottabb fokon a közbeeső lépések természetesen már kimaradhatnak. A fent felsorolt elgondolások érvényre jutottak a kisérleti osztályban a gyakorlások során. Az eredmény minőségi különbséget mutatott a vizsgálati osztályok eredményéhez képest. A 25 tanuló közül 21 hibátlanul oldotta meg a feladatát.

Nézzük meg, hogy a vizsgált populációban a megelőzésre és javitásra irányuló beavatkozásunk lényeges változást eredményezett-e a tanulók teljesitményében:

X osztály:

$$\bar{x}' = \frac{14}{25} = 0,56$$

$$\sum x'^2 = 14$$

$$\frac{(\sum x')^2}{n_1} = \frac{196}{25} = 7,84$$

$$\sum (x' - \bar{x}')^2 = 6,16$$

Kisérleti osztály:

$$\bar{x} = \frac{21}{25} = 0,84$$

$$\sum x^2 = 21$$

$$\frac{(\sum x)^2}{n_2} = \frac{441}{25} = 17,64$$

$$\sum (x - \bar{x})^2 = 3,36$$

$$s = \sqrt{\frac{6,16 + 3,36}{48}} = \sqrt{\frac{9,52}{48}}$$

$$s = 0,45$$

$$t = \frac{0,84 - 0,56}{0,45} \sqrt{\frac{25\ 25}{50}}$$

$$t = 2,302$$

$$0,02 < P < 0,05$$

Vagyis beavatkozásunk szignifikáns különbséget eredményezett a tanulók teljesitményében. 95-98%-os valószinüséggel mondhatjuk, hogy a két osztály teljesitménye között tapasztalható különbség beavatkozásunknak az eredménye.

9. hiba

A többtagu számláló és többtagu nevező esete mellett azt is vizsgáltam, hogy a többtagu kifejezés hatványozása milyen ujabb hibákkal szaporitja a hibák számát.

Vizsgálat

Átalakitás után egyszerüsitsük a következő törtet:

$$\frac{(a + b)^2 - 2ab}{a^2 + b^2}$$

A feladat szövegében azért emlitettem meg az átalakitást, mert ugy véltem, hogy ez kissé nehezebb feladat. /Bár az $(a+b)^2$ és a $(-2ab)$ közötti kapcsolat meglátása elvárható volna./

A vizsgálat eredménye:

X oszt.	11 /44%/	hibátlan	7/28%/	hibás	4/16%/	részben fogl.	3/12%/ nem fogl.
Y "	20/47%/	"	12/29%/	"	5/12%/	vele	5/12%/vele
U "	19/41%/	"	15/33%/	"	7/15%/	"	5/11%/ "

Akik részben foglalkoztak a feladattal, eljutottak az $\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}$

de ezt végeredménynek tekintik. Kérdésemre igy válaszoltak: "Nincs közös tényező, tehát nem egyszerüsithető tovább."

A mikor $\frac{1(a^2 + b^2)}{1(a^2 + b^2)}$ alakban irtuk fel, akkor már legtöbbjük meglátta, hogy az (a^2+b^2) közös tényező és egyszerüsitettek vele.

A 113 tanuló közül 13 üres feladatlapot adott be. Ezek hiányos előismeretekkel rendelkeztek /hiányoztak az előző órákon vagy teljesen leblokkoltak/.

A feladat megoldása során elkövetett hibák tipusai:

a./ $\dfrac{\cancel{(a+b)^2} - 2ab}{\cancel{a^2+b^2}} = -2ab$

b./ $\dfrac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2+b^2} = \dfrac{\cancel{a^2} + \cancel{b^2} - 2ab}{\cancel{a^2} + \cancel{b^2}} = -2ab$

/13 tanuló/

c./ $\dfrac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2+b^2} = \dfrac{\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2ab - 2ab}{\cancel{a^2} + \cancel{b^2}} = 2ab - 2ab = 0$

/10 tanuló/

d./ $\dfrac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2+b^2} = \dfrac{\cancel{(a+b)}(a+b) - 2ab}{\cancel{(a+b)}(a-b)} = \dfrac{a+b-2ab}{a-b}$

/8 tanuló/

e./ $\dfrac{(a+b)^{\cancel{2}} - 2ab}{a^{\cancel{2}}+b^{\cancel{2}}} = \dfrac{a+b-2ab}{a+b}$

/3 tanuló/

Az eredményt jónak tekintettem, ha a tanuló az 1 végeredményt kapta, mivel

$$\frac{(a+b)^2 - 2ab}{a^2+b^2} = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - 2ab}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Az egyéni beszélgetésekből azonban kiderült, hogy az 50 hibátlannak minősitett megoldás közül 6 "véletlenül" jó, mivel az utolsó lépésnél igy okoskodtak:

$$\frac{\cancel{a^2} + \cancel{b^2}}{\cancel{a^2} + \cancel{b^2}} = \frac{1+1}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

vagyis először a^2-tel egyszerüsitettek, majd b^2-tel, amely most véletlenül ugyanazt az eredményt adta, mint (a^2+b^2)-tel való egyszerüsités.

Az elkövetett hibák tipusainak vizsgálata azt mutatta, hogy a hibák előidézésében szerepet játszik a hamis analógia, a formalizmus és a megszokás.

Az a./ tipusu hiba a 8/a hibának felel meg. Ezek a tanulók nem vették figyelembe a feladat szövegében szereplő "átalakitás" felszólitást. Kettős hibát követnek el, mivel az $(a+b)^2$ kifejezést azonositják az (a^2+b^2) kifejezéssel, másrészt a többtagu számlálónak csak az egyik tagját egyszerüsitik, azt is olymódon, hogy elvonás utján "eltüntetik" a számlálóból és a nevezőből az $(a+b)^2$ és az (a^2+b^2) tagokat. Az $(a+b)^2= a^2+b^2$ hibás elgondolásra elsősorban hamis analógia vezeti a tanulót. Egyik legkorábbi szabályt, t.i. hogy összeget tagonként szorzunk egy számmal igyekszenek alkalmazni és a hatványozást is tagonként elvégezni. Ezeknél a tanulóknál az $(a+b)^2$ kifejezés nem jelenik meg $(a+b)(a+b)$ alakban, vagy ha megjelenik is, megszokásból a tagonkénti hatványozásra való "irányultságuk"miatt $(a+b)^2=a^2+b^2$ alakban adják meg a megoldást.

A b./ hibánál lényegében azok az okok játszanak szerepet, mint az a./ hibánál, annyi különbséggel, hogy figyelembe veszik az "átalakitás" felszólitást, le is irják a hibás elgondolás lépéseit.

A c./ hibát elkövető tanulók már helyesen oldják meg az $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ átalakitást, de az átalakitás után a már tárgyalt egyszerüsitési hibába esnek.

A d/ hibacsoport a hibás egyszerüsités ténye mellett pozitiv törekvést is mutat. A "tényezőkkel való egyszerüsités" elvének gondolatát tartalmazza. Az átalakitás során tényezők előállitására törekszik, de ebben a törekvésben a formalizmus és a megszokás fedezhető fel. A tanuló megszokta, hogy a példák egész soránál segitett az $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ átalakitás. Ezt a felbontást minden további nélkül átviszi az a^2+b^2 formára is.

Az e./ hibát elkövető 3 tanuló számára a hatványozás és az egyszerüsités teljesen tisztázatlan fogalom. Nem látják az $(a+b)^2$ és (a^2+b^2) közötti különbséget. Ezt a sulyos hibát tetézik az egyszerüsités tisztázatlan voltából származó hibával.

A fenti hibacsoportok megelőzési és javitási módjára nem folytattam kisérletet, mivel a 8. hibánál szereplő kisérlet ezen hibák megelőzésére is vonatkozik.

10. hiba

Ide sorolom azokat a hibákat, amelyek az elsőfoku egyismeretlenes egyenletek megoldásakor fordulnak elő. Az észlelt hibák a már tárgyalt hibák következményei, tehát eredetük szerteágazó. Ha tanitásunk során nem forditottunk kellő figyelmet az előzőekben tárgyalt hibákra, akkor ezek összhatása olyan sulyos következményekkel jár, amelyet röviden ugy fejezhetünk ki, hogy a tanulók nem tudnak egyenletet helyesen megoldani. A 10. hiba tehát azt jelenti, hogy az egyenlet megoldása során a tanuló hibát vagy hibákat követett el.

Az egyenlet gyökeit az egyenleten végzett ekvivalens átalakitásokkal nyerjük, amelyhez szükséges fogalmakat előzőleg gondosan kialakitottuk. Mondhatjuk, hogy ezen "épitőkockákból" rakjuk össze az egyenlet megoldását. Mivel az épitőkockák tanitása alkalmával találkoztunk hibákkal, természetes, hogy az "épitmény" méginkább hibákkal terhelt. Az egyes épitőkockák, elemek /összevonás, többtaguak szorzása, zárójeleltávolitás, kiemelés, törtekkel kapcsolatos problémák, stb.../ tárgyalása során rámutattam az előforduló hibákra és ezek megelőzési illetve javitási módjaira, ezért csak néhány olyan hibát teszek vizsgálat tárgyává, amelyek az uj fogalommal, az egyenlettel kerülnek felszinre. Ilyen hibák a következők:

a./ törtek eltávolitásával kapcsolatos hibák

b./ reciprokképzéssel kapcsolatos hibák

c./ a két oldal egyenlő változtatásának elvéből a tanulók által "leszürt" formális és analógiás hibák.

Vizsgálat

Oldjuk meg az egyenleteket:

a./ $-3x = \frac{1}{2}$

b./ $\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$

c./ $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$

d./ $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

e./ $2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$

A vizsgálatot ugy hajtottam végre, hogy bőven legyen idejük a tanulóknak, ugyanakkor minden egyes megoldási lépést le kellett irni /megmondani, hogy mit csinálunk/.

A feladatok értékelése után a következő eredményt tapasztaltam:

	Mind az 5 jó	4 jó	3 jó	2 jó	1 jó	Egy sem jó
X osztály	10/40%/	5/20%/	2/8%/	3/12%/	3/12%/	2/8%/
Y "	14/33%/	8/19%/	6/14%/	6/14%/	5/12%/	3/8%/
U "	13/28%/	8/17%/	10/22%/	5/11%/	4/9%/	6/13%/

Az öt feladat megoldása során elkövetett hibák száma növekvő sorrendben a következőképpen alakult:

c./ feladatnál:	8	tanuló	/ 7 %/
b./ " :	12	"	/11 %/
a./ " :	17	"	/15 %/
d./ " :	24	"	/22 %/
e./ " :	54	"	/48 %/

A hibáknak a fenti sorrendben való alakulása első látásra bizonyos meglepetést válthat ki. A tanulók ugyanis csak később foglalkoznak olyan egyenletek megoldásával, amelyek a nevezőjükben tartalmaznak ismeretlent. Ugyanakkor az a./ és b./ jellegü feladatok begyakorlása során számos olyan információt raktároznak el, amelyek segitik őket a további feladatok megoldásában, igy pl. a c./ jellegü feladat megoldásában is.

Az $\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ egyenlet megoldásánál a tanulók csak kevés hányada okoskodik a törteltávolitás begyakorolt módszerével:

$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$ szorzom az egyenletet 3x-szel

$3 = x$

Ehelyett inkább a formális "keresztbeszorzás" :

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$x = 3$$

illetve a reciprokképzés dominál:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{3}{1}$$

$$x = 3$$

Az utóbbi két elgondolás nyilvánvalóan ugyanazt a jó megoldást eredményezi, de a később tárgyalt feladattipusoknál hibákat eredményezhet a formális alkalmazás. A d./ feladat megoldásában hibázó tanulók hibáit nem mondhatjuk tipikusaknak, hiszen számuk aránylag kevés. /A hibát vagy ott követték el, hogy 3x helyett (x+3)-mal szorozták az egyenletet, vagy csak az egyik oldal reciprokát vették, mivel az x csak az egyik oldalon fordult elő a nevezőben./

A b./ feladatnál előforduló gondolkodásmód lényegében az előző feladatnál látottakkal egyezik meg. Hogy a hibák száma 7%-ról 11%-ra ugrott, az annak a következménye, hogy 5x = 6 alak még nem végeredmény /az előző feladatnál az $x = 3$ végeredmény volt/. A feladatok kitüzésénél éppen ennek a lépésnek a megoldásánál vártam tipikus hibát. Általában az $ax=b$ egyenlet megoldásának problémája ez. Több tanuló

$$5x = 6$$
$$x = 1$$

megoldást ad. Általában tehát a hiba ilyen alaku:

$$ax = b$$
$$x = b - a$$

A hiba oka egyrészt az együttható tisztázatlan fogalmának következménye /amelyről a dolgozatban már több helyen emlitést tettem/ másrészt az egyenletmegoldás technikájából származó formális és analógiás hiba. A két oldal egyenlő változtatásának elve /mérlegelv/ alapján sorozatban oldatjuk meg a feladatokat. Ha nem is mondjuk, a tanuló azt a formális szabályt raktározza el, hogy az egyenlet egyik oldaláról a másik oldalra átvitt tag előjele ellentétesre változik:

$$x + a = b$$
$$x = b - a$$

Amikor az $x+a=b$ alak helyett az $ax=b$ alakkal van dolga, a hamis analógia sugallatára lesz az $ax=b$ egyenlet megoldása $x=b-a$.

Az a./ feladatban méginkább hajlamos a tanuló e hamis analógia felhasználására. A tört eltávolitása jelenti a hibába esés kisebbik lehetőségét, a nagyobbik inkább a

$$-6x = 1$$
$$x = 1 + 6$$
$$x = 7$$

rossz megoldáshoz vezet.

E feladatnál előforduló 15%-os hiba mellett bizonytalanságot árult el több tanuló a /-6/-os együtthatóval kapcsolatban. Ők a negativ előjelet a /-1/-gyel való szorzással távolitják el, de "elfeledkeznek" a jobb oldal beszorzásáról.

Mások az $x = \frac{1}{-6}$ megoldást adják. Ezen tanulók a "baloldalon szorzó, jobboldalon osztó" formális szabályra hivatkoznak, de a megkérdezettek többsége nem meri azonositani az $x = \frac{1}{-6}$ -ot az $x = -\frac{1}{6}$-dal.

A d./ egyenlet megoldásánál a tanulók 22%-a hibát követ el. Mivel ez a feladat szerkezetében bonyolultabb az előző feladatoknál, várható volt, hogy emelkedik a hibás megoldások száma. Ugyanakkor az előző, egyszerübb feladatoknál elkövetett hibák mellett olyan hibák is felszinre kerülnek, amelyek méginkább megerősitik a hibák formális és analógiás voltát. A tapasztalt főbb hibák a következők voltak:

1./ $$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$
$$x + 2 = 3$$

2./ $$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$
$$x + 2 = \frac{1}{3}$$

3./ $$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$
$$2 + x = \frac{1}{3}$$

4./ $$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \qquad / \quad 3(x+2)$$
$$6x + 3x = x + 2$$

5./ $$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{x + 2} = \frac{1}{3}$$

Az 1. és 2. hiba a c./ feladatnál alkalmazott reciprokképzés közvetlen következménye. Amig az a c./ feladatnál helyes eredményt adott /és éppen ezért alkalmazásának formális vagy tudatos volta nem dönthető el/, a d./ feladatnál való sablonos, hamis analógián alapuló alkalmazása hibához vezet. A 2. hibánál csak a bal oldalnak képezik tagonként a reciprokát. Ehhez az a gondolat, észrevétel vezeti a tanulót, hogy csak a baloldalon szerepel x a nevezőben.

Ez igy is van, de a tagonkénti reciprokképzés mellett önálló életre kel az egyenlet baloldala, amelyet ujabb hibának számithatunk.

A 3. hiba formailag a2. hiba eredményére vezet, sőt abban is megegyeznek, hogy a tanuló az egyenletnek csak a baloldalával foglalkozik. Ennél a hibánál a baloldalból nem a reciprokképzés utján jut a tanuló a (2 + x)-hez, hanem a "keresztbeszorzás" alkalmazásával.

A 4. és 5. hiba eredete az algebrai törtek témaköréhez nyulik vissza /törtek egyszerüsitése, törtek bővitése, legkisebb közös többszörös, müveletek törtekkel/, amelyről már beszéltünk. A 4. hibánál bár a 3(x + 2)-vel való szorzás megjelölése hibás, a beszorzás után azonban a jobboldalon a 3 x 2-vel való szorzás eredménye szerepel. Ennek oka, hogy formailag a törteltávolitás igy rögzitődött: "a számlálót a legkisebb közös többszörösnek azzal a részével kell szorozni, amelyet az illető nevező kihagyásával kapunk."

Az 5. hiba az algebrai törtekkel végzett müveletek tisztázatlan, kellő módon be nem gyakorolt voltából származik.

Az e./ egyenlet megoldásánál előforduló hibák közül három hibával foglalkozom részletesebben:

1./ a törtek eltávolitásánál tapasztalható hiányosságok

2./ 5-x és x-5 közötti kapcsolat a közös nevező szempontjából

3./ a törtvonal előtti minusz jel szerepe.

A 48%-os hibaátlag elsősorban e három dolog miatt következett be. /természetesen az egyenlet megoldása során további, az előző egyenleteknél tárgyalt hibákkal is találkozunk/.

Ha az egyenlet megoldását (5-x)(x-5)-tel való beszorzással kezdték, akkor az egyenlet az $x^2 + 11x - 80 = 0$ másodfoku egyenlethez vezetett, melynek gyökei: $x_1 = -16$, $x_2 = 5$. Az $x=5$ azonban nem gyöke az egyenletnek, mivel a nevezők ebben az esetben 0-val egyenlők. Ezt az utat 35 tanuló választotta, hibának nem számitottam, mivel az $x^2 + 11x - 80 = 0$ egyenletnél megakadtak. /T.i. másodfoku egyenlettel még nem foglalkoztak./ Ezt az utat választó 35 tanuló közül azonban 16 tanuló a törtek eltávolitásánál a következő hibát követi el:

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5} \qquad / \quad (5 - x)(x - 5)$$

$$2 - (2x - 6)(x - 5) = 5x(5 - x)$$

vagy

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5} \qquad / \quad (5 - x)(x - 5)$$

$$2 - 2x - 6(x - 5) = 5x(5 - x)$$

Az egyenletben szereplő tört tagok tehát önállósulnak az egészekkel szemben, illetve a többtagunak többtaguval való szorzásánál a jelölésben a zárójelhasználat nem tudatos. /A más uton elinduló tanulók közük 12 tanuló hasonló hibát követ el annyi különbséggel, hogy a beszorzás után $2+2x-6=5x$ egyenlethez jut./ A zárójelhasználattal kapcsolatos hibákról már szóltam, az egészek és törtek problémája azonban tipikusan az egyenletmegoldás során vetődik fel. Okának megállapitása végett a hibázó tanulókkal egyéni beszélgetést folytattam, illetve ujabb feladatokat kellett megoldaniuk és az egyes lépéseket megmagyrázniuk. Arra a kérdésre, hogy a 2 egészet miért nem szorozta meg, legtöbben azt válaszolták: "mert a kettes szám egész, nem tört." A törtek eltávolitása érdekében történik az egyenletnek a szorzása. E rövid szabálynak ilyen formában való rögzitése arra sarkallja a tanulót, hogy csak a törtekkel foglalkozzon, tehát mintha a tört külön élne az egyenletben betöltött szerepétől és az egész számoktól. Ez arra mutat, hogy az algebrai törtekkel végzett müveletek tanitásánál nem jártunk el kellő gondossággal.

A vizsgálódás arra is rámutatott, hogy a törtek eltávolitása ezeknél a tanulóknál /sőt azok egy részénél is, akik helyesen oldották meg a feladatot/ formális, verbális tudást takar. Ugyanis ezek a tanulók nem tudták helyesen indokolni, hogy a

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$$

egyenletből mért lesz a tört eltávolitása után

$$2(5 - x)(x - 5) - (2x - 6)(x - 5) = 5x(5 - x) .$$

Nemcsak irásmódjukból, de gondolati sorukból is kimaradt a következőkben kapcsos zárójellel jelölt rész:

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{2}{1} - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5} \qquad / \ (5 - x)(x - 5) \\ &\frac{2(5 - x)(x - 5)}{(5 - x)(x - 5)} - \frac{(2x - 6)(x - 5)}{(5 - x)(x - 5)} = \frac{5x(5 - x)}{(5 - x)(x - 5)}) \\ &\frac{2(5 - x)(x - 5) - (2x - 6)(x - 5)}{(5 - x)(x - 5)} = \frac{5x(5 - x)}{(5 - x)(x - 5)}) \end{aligned}\right.$$

$$2(5 - x)(x - 5) - (2x - 6)(x - 5) = 5x(5 - x)$$

A feladat célszerü megoldása nem az $(5 - x)(x - 5)$-tel való beszorzást kivánta, hanem az $(5 - x)$ és $(x - 5)$ mint nevezők közötti kapcsolat meglátását. Az aldebrai törtek egyszerüsitése, bővitése, a közös nevezőre való hozás, a legkisebb közös többszörös tárgyalásánál a jelzett kapcsolat több helyen alkalmazást nyert. A vizsgálat azt mutatja, hogy az egyenletmegoldásnál az alkalmazás mégis problémákat, hibákat eredményez. A hibák oka oda vezet vissza, hogy vagy elsiettük az algebrai törtek témakörének tanitását, vagy az egyenletmegoldás technikájánál nem mutattunk vissza kellő módon az algebrai törteknél tanultakra.

Azok a tanulók, akkk helyes eredményt hoztak ki /x=16/, a következő uton jártak el:

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$$

$$2 + \frac{2x - 6}{x - 5} = \frac{5x}{x - 5} \qquad / \quad (x - 5)$$

$$2(x - 5) + 2x - 6 = 5x$$

$$x = -16$$

Ezek a tanulók meglátták az $5-x=-(x-5)$ összefüggést. Ennek az összefüggésnek a meglátása és alkalmazása elvárható volt a többi tanuló többségénél is, hiszen az algebrai törtek témakörében sorozatban oldottak meg olyan müveleteket, egyszerüsitéseket, amelynél ezt alkalmaztuk, Az a tény, hogy az egyenletmegoldásnál kevesen fedezték fel ezt a lehetőséget, arra mutat, hogy nincs meg a szoros kapcsolat a két anyagegység között, az algebrai törtekkel végzett müveletek ismerete formális, öncélu, holt tőke, nem teljesitőképes tudást jelent ezeknél a tanulóknál. Tipikus hibának mondható az is, hogy sok tanuló nem tesz különbséget az $5-x$ és $x-5$ között, beszorozza az egyenletet $(5-x)$-szel és a

$$2(5 - x) - (2x - 6) = 5x$$

egyenlethez jut. Az elkövetett hiba még sulyosabb formában jelentkezik azoknál a tanulóknál, akik a törtvonal előtti minusz előjel szerepében is hibáznak. Ez a kétszeri hiba vezet a

$$2(5 - x) - 2x - 6 = 5x$$

egyenlethez.

A törtvonal előtti minusz jel problémát okoz azon tanulók egy részénél is, akik ugyan meglátták az $5-x= -(x-5)$ összefüggést. Ezek a tanulók azonban ugy vélték, hogy a törtvonal előtti minusz jel a következő módon segit az $5-x= -(x-5)$ összefüggés felhasználásában:

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$$

$$2 + \frac{6 - 2x}{x - 5} = \frac{5x}{x - 5} \qquad / \quad (x - 5)$$

$$2(x - 5) + 6 - 2x = 5x$$

A hiba nyilvánvaló: a törtvonal előtti minusz jel egyidejüleg megváltoztatja a tört számlálójának és nevezőjének is az előjelét. Azok a hibák ismétlődnek itt meg, amelyekre a 6. hiba tárgyalásánál rámutattam, vagyis a

$$-\frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{6 - 2x}{5 - x}$$

$$-\frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{2x - 6}{x - 5}$$

$$-\frac{2x - 6}{5 - x} = -\frac{2x - 6}{-(x-5)} = \frac{2x - 6}{x - 5}$$

stb. összefüggések tisztázatlan volta.

Több tanuló az egyenletmegoldás során arra hivatkozik, hogy "a törtvonal zárójelet helyettesit", ezért kell a törtvonal előtti minusz jel esetében a tört eltávolitása után zárójelet alkalmazni. Pl. :

$$5 - \frac{2 - x}{x - 6} = 3 \qquad / \quad (x - 6)$$

$$5(x - 6) - (2 - x) = 3(x - 6)$$

Ez a magyarázat nem vezet ugyan hibára, de teljesen formális, verbális tudást eredményez. Ehelyett a tudatosságnak kell dominálni, amelyet a már tárgyalt uton biztositani tudunk.

Végezetül rámutatok még két hibára, amelyek az algebrai kifejezések átalakitása és az egyenletmegoldás közötti hamis analógia felhasználásából illetve megszokásból származnak.

Az algebrai kifejezések azonos átalakitása során a tanuló megszokta az egy sorba való folyamatos irásmódot, pl. :

$$\frac{2a - 2b}{a^2-b^2} = \frac{2(a - b)}{(a+b)(a-b)} = \dots$$

Ezt az irásmódot több tanuló az egyenletmegoldásban is érvényben igyekszik tartani, pl.:

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5}$$

$$2 - \frac{2x - 6}{5 - x} = \frac{5x}{x - 5} = 2 + \frac{2x - 6}{x - 5} = \frac{5x}{x - 5} = \dots$$

Ezzel az irásmóddal teljes össze-visszaság adódik, eltünik az egyenlet jobb és baloldalának szerepe, az egyenletet vélt azonosságnak tekintik.

A másik hiba a törteltávolitás módszerének "alkalmazása" az algebrai kifejezések egyszerübb alakra való irásában. Különösen előfordul ez a hiba akkor, ha a jelölés is támogatja a hamis analógiára való hivatkozást /ha az algebrai kifejezésben szereplő betüt x-szel jelöljük, mint az egyenletnél általában az ismeretlent/.

Példa

Irjuk egyszerübb alakra a következő kifejezést:

$$1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x + 1}}$$

A feladat a már tárgyalt "emeletes törtek" problémáit is előhozza, de emellett az egyenlet és kifejezés fogalmának a keverését is. Több tanuló egyenletként kezeli és az egyszerübb alakot a törteltávolitásnak az egyenletnél alkalmazott módszerével "éri el", de a következő módon:

$$1 - \frac{x}{1 - \frac{2x}{x+1}} = 1 - \frac{x}{x + 1 - 2x} = 1 - \frac{x}{1-x} = 1 - x - x = 1 - 2x$$

A 10. hiba illetve hibacsoport tárgyalásánál olyan hibákat soroltam fel, amelyeknek gyökereivel, javitási és megelőzési módjaival a dolgozat előző részeiben részletesen foglalkoztam.Nem soroltam fel több olyan hibát, amelyeknek előfordulását szintén gyakran tapasztalhatjuk, mivel ezekkel kapcsolatos elemzésekkel a szakirodalomban több szerző foglalkozik.

11. hiba

A második osztályban a szögfüggvények értelmezése és a velük való bánásmód begyakorlása után vizsgálatot folytattam e témakörben előforduló tipikus hibák felmérése érdekében. Az előző hibák /1-10. hibák/, amelyek az első osztályban előforduló hibák voltak, olyanok, hogy a javitási és megelőzési eljárásokat kisérleti osztályon próbáltuk ki. A dolgozat bevezető részében emlitettem, hogy felsőbb osztályokban a kisérleti osztály megszervezését mellőztük, igy a hibák orvoslására tett megjegyzéseimet többéves tanitásom során kipróbált eljárásokra alapozom.

Vizsgálat

Mekkora az α szög, ha : $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

Három osztály 86 tanulója vett részt a vizsgálatban.

A vizsgálat eredménye:

hibátlan megoldás: 61 /71 %/ tanuló

hibás " : 25 /29 %/ "

A hibázó 25 tanuló közül 3 tanuló a táblázatból való visszakeresésnél követett el hibát, 22 tanuló hibája két hiba közt oszlik meg a következő módon:

a./ $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ / 2

$\sin\alpha = 1$ / 19 tanuló /

$\alpha = 90^\circ$

b./ $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ / 2

$2\sin\alpha = 1$

$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ / 3 tanuló /

$\alpha = 30^\circ$

Mindkét hiba eredete a hamis analógiára és a fogalom tisztázatlan voltára vezethető vissza.

A törtes egyenleteknél alkalmazott törteltávolitás módszerét alkalmazzák /analógia alapján/ a 2-vel való beszorzáskor. Ugyanakkor ezeknél a tanulóknál a $\sin\frac{\alpha}{2}$ és $\frac{\sin\alpha}{2}$ között nincs különbség /fogalom tisztázatlan volta miatt/. A "sin" jel önmaga is önálló része a kifejezésnek, formális módon megy át tudatukba a sinus fogalma. Mivel nemcsak a fogalom tisztázatlan voltából származik ez a hiba, hanem hamis analógián és megszokáson is, ezért teljesen kiküszöbölni nem tudjuk, előfordulása gyakoriságát azonban csökkenthetjük a sinus fogalmának tiszta kialakitásával, szemléltetéssel és a kifejezés olvasásának taglalásával.

Hasznosnak mutatkozik, hogy a tanulók maguk elemezzék, miért nem tehetünk egyenlőségjelet a $\sin\frac{\alpha}{2}$ és a $\frac{\sin\alpha}{2}$ közé ? /Itt még csak a derékszögü háromszög hegyesszögét jelenti az α./ Az elemzés elvezet oda, hogy a $\frac{\sin\alpha}{2}$ -nél az α szögnek vesszük először a sinusát /amely egy viszonyszámot ad/, majd ennek a viszonyszámnak a felét, a $\sin\frac{\alpha}{2}$ esetében pedig az α szögnek vesszük először a felét /amely egy szögértéket ad/ és az igy kapott szögnek vesszük a sinusát. Tulajdonképpen burkolt formában annak a belátásáról van szó, hogy általában: $c\,f/x/ \neq f/cx/$. A tárgyalt hiba nemcsak a $\sin\alpha$ esetében fordul elő, hanem a többi szögfüggvénynél is. Hasonló, analógiás, megszokásból és a fogalom tisztázatlan voltából származó hibák ezek. /Itt jegyzem meg, hogy több tanuló a $\sin^2\alpha$ esetében is bizonytalanságot árul el. A jelölés okozta nehézség abból származik, hogy nem forditottunk kellő gondot a jelölés magyarázatára, nevezetesen arra, hogy $\sin\alpha \cdot \sin\alpha = (\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$. További, a formalizmusból származó hiba, hogy sok tanuló csak akkor irja fel helyesen a derékszögü háromszög szögeinek függvényét, ha a háromszöget a megszokott állásban veszi fel, illetve oldalait a megszokott a,b,c betükkel jelöli./

12. hiba

A matematikai szimbólumok, jelölések nemcsak a szögfüggvényeknél járnak nehézséggel, hanem a logaritmusnál is találkozunk evvel a problémával. Az alábbiakban tárgyalt vizsgálat eredménye azt mutatja, hogy ez a fontos fogalom nemcsak mint uj fogalom szokatlan, nehéz a tanulók számára, hanem törmör jelölésmódja miatt is nagy körültekintéssel kell lennünk a tárgyalásnál.

A szimbolika sok tanulónál formalizmushoz vezet, a forma lesz az elsődleges a tartalommal szemben, éppen a tartalom hiánya miatt. Ezt a formális ismeretet segiti, hogy a logaritmustábla mechanikus alkalmazásának tudására szállitjuk le olykor a tanulók tartalmi tudását.

Vizsgálat

Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a./ $\lg \lg x = \lg 10$

b./ $\lg^2 x = 4$

Az a./ feladatot 84 tanuló közül 32 tanuló, a b./ feladatot pedig 24 tanuló hibásan oldotta meg. Az elkövetett hibák az a./ feladatnál igy oszlottak meg:

$$\lg \lg x = \lg 10$$
$$\lg x = 1 \qquad / 12 \text{ tanuló} /$$
$$x = 10$$

$$\lg \lg x = \lg 10$$
$$\lg x = 10 \qquad / 14 \text{ tanuló} /$$
$$x = 1$$

$$\lg \lg x = \lg 10$$
$$\lg x + \lg x = \lg 10$$
$$2 \lg x = \lg 10 \qquad / \text{ 6 tanuló } /$$
$$x^2 = 10$$
$$x = \sqrt{10}$$

Az első esetben észreveszik, hogy lg 10 = 1, az lg jel igy eltünik a jobboldalon, de mivel egyenlet, igy a baloldalon levő egyik lg jelnek is el kell tünni /hamis analógia, a jelekkel való formális bánásmód, a fogalom tisztázatlan volta !/.

A második esetben a fogalom tisztázatlan volta játszik elsőrendü szerepet. A lg x = 10 egyenletből x=1 megoldást ad 14 tanuló. Ezeknél a tanulóknál a logaritmus fogalmának ujbóli tisztázásával tudunk segiteni.

A harmadik hibánál a lg lg x jelölést szorzatnak vélik és a szorzat logaritmusának szabálya szerint lesz belőle lgx+lgx. Nem látják az lg lg x kifejezésben az f/g/x// összetett függvényt. Célszerü a lg lg x kifejezést lg(lg x) alakban is felirni - tudatosodjon, hogy a zárójel elhagyása csak az egyszerübb irásmód miatt történik.

A b./ feladatban 24 tanuló hibája a következő képet mutatja:

13 tanuló	11 tanuló
$\lg^2 x = 4$	$\lg^2 x = 4$
$2 \lg x = \lg 4$	$\lg^2 x = 2^2$
$2x = 4$	$x = 2$
$x = 2$	

Az első tipusu hiba /amely két hibából tevődik össze/, a tanult szabályok alkalmazása során születik. Ugyanis tudja a hatvány logaritmusának szabályát arra az esetre, amikor a hatvány alapja egy szám / $\lg x^n = n \lg x$ /, de nem veszi észre, hogy a hatvány alapja most egy függvény, a logaritmusfüggvény. "A hatványalap logaritmusát szorzom a kitevővel, de mivel a hatvány alapja /x/ már logaritmálva van, ezért csak a kettővel kell megszorozni" - mondják. Igy lesz a 2lg lg x helyett 2lg x. Ugyanezek a tanulók követik el a további megoldás során azt a durva hibát, hogy az egyenletet ugymond "egyszerüsitik" lg-vel.

A második tipusu hiba szintén a függvénytani előismeretek gyenge voltára, valamint a jelölés okozta nehézségre mutat. A pozitiv valós számok esetében látták, hogy ha két azonos kitevőjü hatvány egyenlő és ismerjük az egyik alapot, akkor a másik alap ugyanaz a szám: $a^2 = 2^2$ $a = 2$

Ez a gondolat motivál akkor, amikor a $lg^2x = 2^2$ egyenletből $x=2$ lesz, hiszen $2^2 = 2^2$. Ha ezt az egyenletet $/lg\ x/^2 = 2^2$ alakban irtam fel, akkor a hibázó tanulók egy része a $lg\ x = 2$ helyes eredményt irta fel.

A logaritmus témakörében ezeken a hibákon kivül más hibák is előfordulnak /karakterisztika, mantissza, táblázathasználat, visszakeresés, interpoláció, stb. problémái/. Jelen vizsgálatban csak a logaritmus fogalmának tisztázatlan voltából, illetve a jelölésrendszer nehézségéből származó néhány hibára kivántam rámutatni. A $lg^2x = lg\ x\ lg\ x = (lg\ x)^2$, a $lg\ x^2 = lg(x\ x) = lg(x^2)$ és $lg\ lg\ x = lg(lg\ x)$ jelölések megegyezőségének illetve különbözőségének magyarázata a fenti hibák előfordulását nagymértékben csökkenti.

értéket /pl. 38 helyett 3,8-nél/ vagy bár jó helyen nézte a függvényértéket, de a tizedes vessző helyét rosszul választotta meg. / Pl. 0,06164 helyett 0,6164-et vagy 0,006164-et ir./

Mindkét hiba eredete a számok normálalakjának felirásában, illetve a hatványozásban és a gyökvonásban való járatlanságra vezethető vissza. A legfeljettebb módszer a tizedes vessző helyének becsléssel történő megállapitása. Ezt kevés tanuló alkalmazza, mert a tévedés lehetősége jobban fennáll, mint a sablonos eljárásoknál. Feltétlenül megkövetelendő a kezdeti fokon, hogy a négyzetreemelésnél a tanuló

$$x = N\, 10^k \qquad / \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \; / \quad 1 \leq N < 10$$

alakban irja fel a számot, amelyből négyzetreemelés után az

$$Y = x^2 = N^2\, 10^{2k}$$

alakot kapja. A táblázatból N^2 értéke olvasható le, amelyből Y értéke a 10^{2k}-val való szorzás után adódik. Az ilyen jellegü begyakoroltatás után minden közbülső lépés leirása elmaradhat, mert ránézéssel a 2k értéke megállapitható.

A vizsgálat azt is mutatja, hogy a gyökvonásnál gyakrabban fordulnak elő hasonló hibák. Ennek oka nemcsak a gyökvonás inverz müvelet jellege, hanem a 10 kitevőjének páros vagy páratlan volta is. Ugyanis a normál alakot felirvá <u>k</u> páros vagy páratlan, igy 10^k vagy teljes négyzetszám vagy nem. Éppen e két lehetőség vizsgálatából adódik több tanuló bizonytalansága, hibázása. /Nem tudja eldönteni, hogy pl. $\sqrt{384,6}$ értékét 3,84-nál vagy 38-nál nézze-e ?/ Ezt a dilemmát feloldhatjuk a következő szabálynak tapasztalati uton való megmutatásával:

"Irjuk fel a gyök alatti számot $x = M\,10^k$ alakban, ahol 1 M 100 és k páros. Ekkor $y = \sqrt{x} = \sqrt{M\,10^k} = \sqrt{M}\,10^{\frac{k}{2}}$. M értékét a táblázatból nyerjük, amelyet $10^{\frac{k}{2}}$-vel kell szoroznunk."
/Lényegében ugyanazt csináltuk, mint a normálalakos megoldásnál, csak a szétválasztási müveletet egyetlen szabályba öntöttük. Ezen okoskodás után megszünik a táblázathasználatnál a már emlitett bizonytalanság./

Tapasztalatom, hogy a hibák száma a tárgyalt eljárás alkalmazásával lényegesen csökkent.

14. hiba

A gyökvonás azonosságainak alkalmazása során is olyan hibák ismétlődnek meg évről-évre, amelyeknek eredetéről az előző hibáknál szóltam. Szerepet játszik azonban ezekben a hibákban a gyökjel, illetve a gyökvonás szabályainak kellő mértékü begyakorlottságának hiánya is.

Vizsgálat

Gyökjel elé hozással alakitsuk át a következő kifejezéseket:

a./ $\sqrt{\frac{7a}{9b^2}}$ b./ $\sqrt{4a^2 + 8b^2}$ c./ $\sqrt{8(a + b)^3}$

A vizsgálat eredménye:

a./ 7/8%/ hibás b./ 12/14%/ hibás c./ 14/16%/hibás

Az a./ feladatnál a hibázó 7 tanuló a következő megoldást adta:

$$\sqrt{\frac{7a}{9b^2}} = 3b\sqrt{7a}$$

A tört négyzetgyökének szabályát ismerik ezek a tanulók, hiszen a számlálóból és nevezőből vonnak gyököt, de az eredmény algebrai leirását eltévesztik. A hiba ugyanazokra az okokra vezethető vissza, amelyeket az algebrai törtek tárgyalásánál láttunk. /7.hiba/ Ha ugyanezt a feladatot ugy adjuk fel, hogy vonjunk gyököt a következő törtből, akkor csaknem mindenki jó megoldást ad:

$$\sqrt{\frac{7a}{9b^2}} = \frac{\sqrt{7a}}{3b}$$

A "gyökjel elé hozás" felszólitás ösztönzi a tanulót arra, hogy $\frac{\sqrt{7a}}{3b}$ -ből $3b\sqrt{7a}$ legyen. /Vagyis az $\frac{ab}{c} = \frac{1}{c}\,ab$ alakkal kapcsolatos hibáról van itt szó./

A b./ feladatban elkövetett hibák a következők:

$$\sqrt{4a^2 + 8b^2} = 2a + 4b$$

$$\sqrt{4a^2 + 8b^2} = 2a + b\sqrt{8} = 2a + 2b\sqrt{2}$$

Az első hiba teljes tájékozatlanságot árul el a négyzetgyökvonás fogalmáról. A négyzetgyökvonást a kitevők és az együtthatók 2-vel való osztásával végzik el. Hamis analógia is szerepet játszik abban, mivel pl. $\sqrt{a^6} = a^3$, vagyis a kitevőt valóban 2-vel osztjuk. A 2-vel való osztást ennek alapján viszik át az együtthatók esetére is. A második hiba az $(a + b) = ac + bc$, illetve $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ szabályokból származó analógiás hiba. A tagonkénti müveletvégzés szabályát viszik át a tagonkénti gyökvonás esetében. Egyszerü ellenpéldákkal megelőzhetjük ezeket a hibákat. Pl. :

$$\sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{4 + 12} \neq \sqrt{4} + \sqrt{12} = 2 + 2\sqrt{3} \sim 2 + 2\,1{,}7 = 2 + 3{,}4 = 5{,}4$$

Vagy a négyzetreemeléssel való kapcsolat felhasználásával:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Longrightarrow \begin{cases} a + b = \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} \\ a + b \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{2ab} + \sqrt{b^2} = a + \sqrt{2ab} + b \end{cases}$$

Egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $\sqrt{2ab} = 0$, vagyis vagy $\underline{a}$ vagy $\underline{b}$ egyenlő 0-val.

A c./ feladatnál elkövetett hiba:

$$\sqrt{8(a + b)^3} = a + b\sqrt{8(a + b)} = a + 2b\sqrt{2(a + b)}$$

A zárójelhasználat hiányos ismerete miatt hibáznak ezek a tanulók, amelyre a dolgozatban több helyen rámutattam.

K ö v e t k e z t e t é s e k

A középiskolai matematikai tananyagnak csak kicsiny hányadát tettük vizsgálat tárgyává ebben a dolgozatban. A vizsgálatok eredménye azt mutatja, hogy az általános iskolában tapasztalt tipikus hibák általában nem szünnek meg a középiskolában. Egyes hibák tovább élnek, mások százalékos előfordulása csökken, és ujabb hibák előtérbe kerülésével is számolnunk kell. A helytelenül feltételezett analógián alapuló hibák mellett megnövekszik azoknak a hibáknak a száma, amelyeknek eredete a fogalmaknak tisztázatlan voltára, a formalizmusra, a matematikai müszavakra, kifejezésekre és jelölésrendszerekre vezethetők vissza. Ezen ujabb hibák észlelése természetesen összefügg a középiskolai matematikai tananyag nehezebb voltával. Ugyanakkor felszines elintézése volna a problémának csupán az erre való hivatkozás.

Feltétlenül figyelembe kell vennünk a következő tényezőket:

1./ A hibákat elkövető tanulók többsége a gyengébb tanulók közül került ki.

2./ A megelőzésre és javitásra irányuló kisérletek pozitiv eredményt mutattak.

3./ A hibák előfordulásában szubjektiv tényezőkön kivül objektiv tényezők is találhatók.

4./ A matematikai gondolkodás és készség együttes fejlesztésének az előforduló hibákhoz való viszonya.

A felsorolt tényezők külön-külön és együttesen is elsősorban a szubjektiv tényező szerepének megvizsgálására kell, hogy ösztönözzön bennünket. Igényesnek kell lennünk magunkkal szemben, azután lehetünk igényesek tanitványainkkal szemben.

Az adott körülményekhez képest megteszünk-e mindent, hogy a hibák számát a minimumra csökkentsük ?

Ugyanakkor a jó vagy gyengébb tanári munka mellett az objektiv tényezők megvizsgálása is jogos. A társadalom növekvő igényei az iskolával szemben szükségképpen a reformok, a modernizálódás folyamatát inditja meg. Ez a folyamat a tananyag, az oktatási módszerek, sőt a megszokott szervezettségi formák modernizálását követeli.

Egyes hibák előfordulásának a minimumra szoritása elérhető a tanári munka javitásával, az elméletre és gyakorlatra forditott idő helyes arányának megválasztásával, de mindezeknek a figyelembevétele is kevés több hibának jelentősebb csökkentésére. Az adott osztály- és időkeretek , továbbá a tantervben előirt anyag esetleges tulméretezettsége miatt a legnagyobb fáradozás is csak minimális eredménnyel jár. Sok esetben az emlitett objektiv tényezők valamilyen formában való megkerülésével /osztály- és időkeretek felbontásával, pl. korrepetálás/ tudunk segiteni a bajokon. Nem mindig elegendő a tanitási óra /az idő rövidsége, a tanulók inhomogén tudásszintje, a tananyag méretei miatt/ a matematikai gondolkodás és készség megfelelő szintre való emeléséhez. Az emlitett megkötöttségekben is kereshető a megfelelő matematikai gondolkodás hiánya, amely végsősoron erősiti a dolgozatban tárgyalt hibák domináns okainak funkcionálását. A tanulók differenciált szintje, a tananyag korszerüsitése, az ifjunak a jövőbeli társadalmi hasznossága, teljesitőképes tudása differenciáltabb foglalkoztatottságot feltételeznek. Ennek vizsgálata azonban meghalagja e szerény módszertani munka kereteit.

Vizsgálataim és kisérleteim célja néhány tipikus hiba előfordulásakor fellépő okoknak a bemutatása, ezek következményeinek, megelőzésének illetve javitásának keresése. A teljesség és tökéletesség igénye nélkül vállalkoztam erre a munkára. Az általam alkalmazott eljárások nem mondhatók tökéletesnek és egyedül eredményesnek. Mindannyiunk kötelessége azonban, hogy keressük a meglehetősen nagy százalékos arányban előforduló hibák orvoslásához vezető utakat. Ezen lehetséges utak egyikének megtalálásához kivántam dolgozatommal hozzájárulni.

F e l h a s z n á l t   i r o d a l o m

1. Ágoston György: A nevelés elmélete. Pedagógia I. Tankönyvkiadó.
2. Beke Manó : Typikus hibák a matematikatanitásban. Magyar Pedagógia 1900.
3. Bragyisz: A középiskolai matematikatanitás módszertana. Bp. 1954.
4. Cser Andor : Formalizmus a matematikatanitásban. Köznevelés. 1952.
5. Cser Andor - Lénárd Ferenc: Mennyiségek a matematikában. PTI Módszertani Osztály Közleményei.
6. Faragó László : I. gimnáziumi tanulók matematikai absztrakcióképessége. Pedagógiai Szemle 1958.
7. Faragó László : A logikus gondolkodásra való nevelés terén elkövetett didaktikai hibák a középiskolai matematikatanitásban. Tanulmányok a neveléstudományok köréből. 1958.
8. Faragó László : Aritmetikai feladatok általános /algebrai/ alakban való megoldása során elkövetett tanulóhibák. Tanulmányok a neveléstudományok köréből. 1959.
9. Faragó László : Lélektani szempontok érvényesitése a matematikatanitás metodikájában. Tanulmányok a neveléstudományok köréből. 1961.
10. Hajtman Béla : Bevezetés a matematikai statisztikába pszichológusok számára. Akadémiai Kiadó. Bp. 1968.
11. Itelszon : Matematikai és kibernetikai módszerek a pedagógiában. Tankönyvkiadó Bp. 1967.

12. Kelemen László : A gondolkodás nevelése az általános iskolában. Tankönyvkiadó Bp. 1967.

13. Lénárd Ferenc : A problémamegoldó gondolkodás. Bp. 1963.

14. Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák I. osztálya számára. Tankönyvkiadó 1966.

15. Matematika a gimnáziumok és szakközépiskolák II. osztálya számára. Tankönyvkiadó 1967.

16. Menscsinszkaja : A matematikatanitás lélektana.

17. Mosonyi Kálmán : Tipikus gondolkodási hibák számolásból és mérésből az általános iskola felső tagozatában. Doktori disszertáció. Szeged 1968.

18. Piaget : Válogatott tanulmányok. Gondolat 1970.

19. Pólya György : A problémamegoldás iskolája I-II. Tankönyvkiadó 1967.

20. Pólya György : A gondolkodás iskolája. Bp. 1969.

21. Rubinstein : Gondolkodáslélektani vizsgálatok. Bp. 1960.

22. Szelianszky Ferenc : A hibakutatás neveléslélektani problémái. Szeged, 1938.

23. Szelianszky Ferenc : Matematikai tanulóteljesitmények neveléslélektani hibadiagnosztizálásáról és tanulságaiból részletek.

24. Sztoljár : A matematikatanitás módszerei. Tankönyvkiadó 1969.

Tartalomjegyzék